Инварианты графов, узлов и вложенных графов

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Узлы — более сложный топологический объект, чем графы и вложенные графы. Однако их тоже можно классифицировать, используя комбинаторные структуры.

Лекция 10. Узлы

Узлы — более сложный топологический объект, чем графы и вложенные графы. Однако их тоже можно классифицировать, используя комбинаторные структуры.

Узлом в 3-мерном пространстве называется гладкое невырожденное отображение $k : S^1 \to \mathbb{R}^3$, переводящее любые две различные точки $x, y \in S^1$ окружности S^1 в различные точки пространства, $f(x) \neq f(y)$.

Узлы — более сложный топологический объект, чем графы и вложенные графы. Однако их тоже можно классифицировать, используя комбинаторные структуры.

Узлом в 3-мерном пространстве называется гладкое невырожденное отображение $k : S^1 \to \mathbb{R}^3$, переводящее любые две различные точки $x, y \in S^1$ окружности S^1 в различные точки пространства, $f(x) \neq f(y)$.

Термин "гладкое" означает, что отображение f дифференцируемо необходимое число раз (например, бесконечно дифференцируемо). Термин "невырожденное" означает, что его производная не обращается в нуль ни в какой точке.

Лекция 10. Узлы

Узлы — более сложный топологический объект, чем графы и вложенные графы. Однако их тоже можно классифицировать, используя комбинаторные структуры.

Узлом в 3-мерном пространстве называется гладкое невырожденное отображение $k : S^1 \to \mathbb{R}^3$, переводящее любые две различные точки $x, y \in S^1$ окружности S^1 в различные точки пространства, $f(x) \neq f(y)$.

Термин "гладкое" означает, что отображение f дифференцируемо необходимое число раз (например, бесконечно дифференцируемо). Термин "невырожденное" означает, что его производная не обращается в нуль ни в какой точке.

Изучение узлов в трехмерном пространстве и узлов в трехмерной сфере S^3 мало отличаются друг от друга, поэтому мы иногда будем говорить "узлы в пространстве", а иногда "узлы в сфере".

Некоторые узлы мы будем считать одинаковыми — изотопными. Это узлы, которые можно перевести друг в друга гладкими однопараметрическими семействами преобразований пространства.

Лекция 10. Изотопия узлов

Некоторые узлы мы будем считать одинаковыми — изотопными. Это узлы, которые можно перевести друг в друга гладкими однопараметрическими семействами преобразований пространства.

Definition

Два узла $k_0, k_1 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ называются *объемлюще изотопными*, если существует семейство гладких диффеоморфизмов $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, гладко зависящее от параметра $t \in [0, 1]$, в котором F_0 — тождественное отображение, а $k_1 = F_1 \circ k_0$.

Лекция 10. Изотопия узлов

Некоторые узлы мы будем считать одинаковыми — изотопными. Это узлы, которые можно перевести друг в друга гладкими однопараметрическими семействами преобразований пространства.

Definition

Два узла $k_0, k_1 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ называются *объемлюще изотопными*, если существует семейство гладких диффеоморфизмов $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, гладко зависящее от параметра $t \in [0, 1]$, в котором F_0 — тождественное отображение, а $k_1 = F_1 \circ k_0$.

Узел, объемлюще изотопный узлу $t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$, называется *тривиальным*.

Лекция 10. Изотопия узлов

Некоторые узлы мы будем считать одинаковыми — изотопными. Это узлы, которые можно перевести друг в друга гладкими однопараметрическими семействами преобразований пространства.

Definition

Два узла $k_0, k_1 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ называются *объемлюще изотопными*, если существует семейство гладких диффеоморфизмов $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, гладко зависящее от параметра $t \in [0,1]$, в котором F_0 — тождественное отображение, а $k_1 = F_1 \circ k_0$.

Узел, объемлюще изотопный узлу $t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$, называется *тривиальным*.
Для изображения узлов используются различные способы. Наиболее часто используемым является *плоская диаграмма* узла: для всякого узла k можно выбрать направление в $\mathbb{R}^3$, результат проектирования вдоль которого образа узла k имеет лишь конечное число точек простого самопересечения, причем эти самопересечения трансверсальны.
Трансверсальность означает, что две касательные прямые к проекции узла различны.

Лекция 10. Изотопия узлов

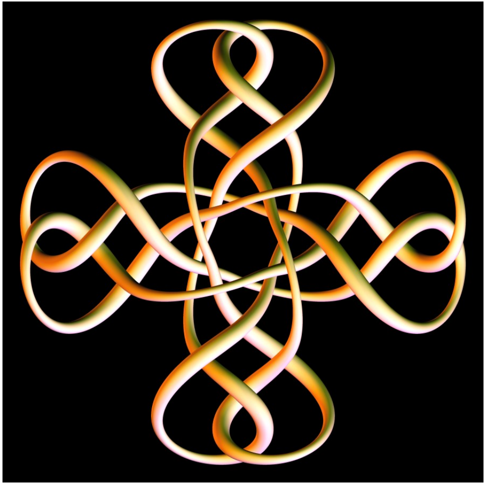
Некоторые узлы мы будем считать одинаковыми — изотопными. Это узлы, которые можно перевести друг в друга гладкими однопараметрическими семействами преобразований пространства.

Definition

Два узла $k_0, k_1 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ называются *объемлюще изотопными*, если существует семейство гладких диффеоморфизмов $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, гладко зависящее от параметра $t \in [0,1]$, в котором F_0 — тождественное отображение, а $k_1 = F_1 \circ k_0$.

Узел, объемлюще изотопный узлу $t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$, называется *тривиальным*.
Для изображения узлов используются различные способы. Наиболее часто используемым является *плоская диаграмма* узла: для всякого узла k можно выбрать направление в $\mathbb{R}^3$, результат проектирования вдоль которого образа узла k имеет лишь конечное число точек простого самопересечения, причем эти самопересечения трансверсальны. *Трансверсальность* означает, что две касательные прямые к проекции узла различны. Кроме того, на плоской диаграмме указывается, какая из ветвей в точке ее самопересечения проходит "выше" (*проход*), а какая "ниже" (*переход*).

Лекция 10. Плоская диаграмма узла



Лекция 10. Табуляция узлов

Английский физик Томсон (будущий лорд Кельвин, первооткрыватель электрона) полагал, что свойства химических элементов определяются тем, как их атомы заузлены в эфире. В связи с этим он поручил своему ученику Тэйту составить таблицы узлов, задаваемых плоскими диаграммами с небольшим числом самопересечений.

Английский физик Томсон (будущий лорд Кельвин, первооткрыватель электрона) полагал, что свойства химических элементов определяются тем, как их атомы заузлены в эфире. В связи с этим он поручил своему ученику Тэйту составить таблицы узлов, задаваемых плоскими диаграммами с небольшим числом самопересечений.

Как правило, при составлении таблиц узлов соблюдаются следующие правила:

Лекция 10. Табуляция узлов

Английский физик Томсон (будущий лорд Кельвин, первооткрыватель электрона) полагал, что свойства химических элементов определяются тем, как их атомы заузлены в эфире. В связи с этим он поручил своему ученику Тэйту составить таблицы узлов, задаваемых плоскими диаграммами с небольшим числом самопересечений.

Как правило, при составлении таблиц узлов соблюдаются следующие правила:

- для каждого класса эквивалентности узлов выбирается плоская диаграмма с минимальным числом двойных точек, представляющая этот класс; если таких диаграмм несколько, то выбирается любая из них;

Лекция 10. Табуляция узлов

Английский физик Томсон (будущий лорд Кельвин, первооткрыватель электрона) полагал, что свойства химических элементов определяются тем, как их атомы заузлены в эфире. В связи с этим он поручил своему ученику Тэйту составить таблицы узлов, задаваемых плоскими диаграммами с небольшим числом самопересечений.
Как правило, при составлении таблиц узлов соблюдаются следующие правила:

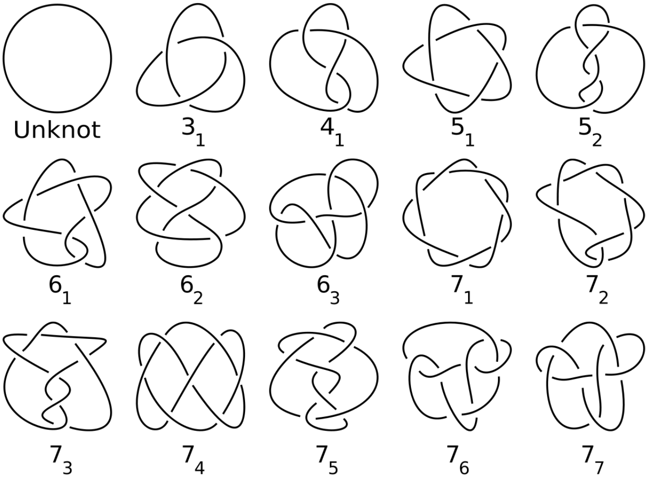
- для каждого класса эквивалентности узлов выбирается плоская диаграмма с минимальным числом двойных точек, представляющая этот класс; если таких диаграмм несколько, то выбирается любая из них;
- табулируются только простые узлы (такие, образ которых нельзя разбить гиперплоскостью, пересекающей его в двух точках и разбивающей его на два нетривиальных узла);

Лекция 10. Табуляция узлов

Английский физик Томсон (будущий лорд Кельвин, первооткрыватель электрона) полагал, что свойства химических элементов определяются тем, как их атомы заузлены в эфире. В связи с этим он поручил своему ученику Тэйту составить таблицы узлов, задаваемых плоскими диаграммами с небольшим числом самопересечений.
Как правило, при составлении таблиц узлов соблюдаются следующие правила:

- для каждого класса эквивалентности узлов выбирается плоская диаграмма с минимальным числом двойных точек, представляющая этот класс; если таких диаграмм несколько, то выбирается любая из них;
- табулируются только простые узлы (такие, образ которых нельзя разбить гиперплоскостью, пересекающей его в двух точках и разбивающей его на два нетривиальных узла);
- табулируются неориентированные узлы, хотя для некоторых неориентированных узлов две различные их ориентации представляют различные классы эквивалентности.

Лекция 10. Начало таблицы узлов



При составлении таблиц узлов необходимо решать задачу сравнения узлов. Для фиксированного количества n точек пересечения несложно нарисовать все возможные (с точностью до диффеоморфизма) плоские диаграммы узлов с n точками самопересечания. (Как нетрудно видеть, множество таких диаграмм конечно: конечно множество плоских графов с n вершинами валентности 4.) После этого необходимо понять, какие из диаграмм представляют эквивалентные узлы.

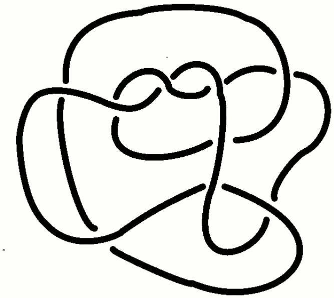
При составлении таблиц узлов необходимо решать задачу сравнения узлов. Для фиксированного количества n точек пересечения несложно нарисовать все возможные (с точностью до диффеоморфизма) плоские диаграммы узлов с n точками самопересечания. (Как нетрудно видеть, множество таких диаграмм конечно: конечно множество плоских графов с n вершинами валентности 4.) После этого необходимо понять, какие из диаграмм представляют эквивалентные узлы.

Понять, представляют ли две диаграммы один и тот же узел, может оказаться сложной задачей. Так, с конца XIX века считалось, что различны два узла, представленные диаграммами на следующем слайде. Их эквивалентность была обнаружена в 1973 г. К. Перко — в то время математиком-аспирантом, впоследствии юристом и математиком-любителем.

Perko A (10_{161}) **Perko B (10_{162})**

$\stackrel{?}{=}$

Лекция 10. Разазывание неузла



Один из способов понять, представляют ли две плоские диаграммы один и тот же узел, состоит в том, чтобы вычислить на них значение инварианта узлов. Если эти значения различны, то узлы, представляемые этими двумя диаграммами, различны.

Один из способов понять, представляют ли две плоские диаграммы один и тот же узел, состоит в том, чтобы вычислить на них значение инварианта узлов. Если эти значения различны, то узлы, представляемые этими двумя диаграммами, различны.

Инвариантом узлов называется функция на узлах, принимающая одинаковые значения на объемлюще-изотопных узлах.

Один из способов понять, представляют ли две плоские диаграммы один и тот же узел, состоит в том, чтобы вычислить на них значение инварианта узлов. Если эти значения различны, то узлы, представляемые этими двумя диаграммами, различны.

Инвариантом узлов называется функция на узлах, принимающая одинаковые значения на объемлюще-изотопных узлах.

Как и в случае графов, придумать инвариант узлов несложно. Например, минимальное количество самопересечений диаграммы узла, разумеется, является его инвариантом. Однако этот инвариант не очень хорош: никто не умеет его вычислять.

Лекция 10. Инварианты узлов

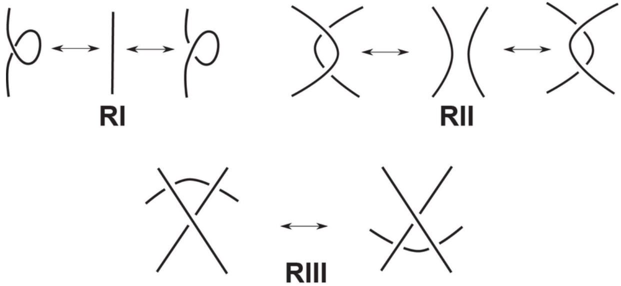
Один из способов понять, представляют ли две плоские диаграммы один и тот же узел, состоит в том, чтобы вычислить на них значение инварианта узлов. Если эти значения различны, то узлы, представляемые этими двумя диаграммами, различны.

Инвариантом узлов называется функция на узлах, принимающая одинаковые значения на объемлюще-изотопных узлах.

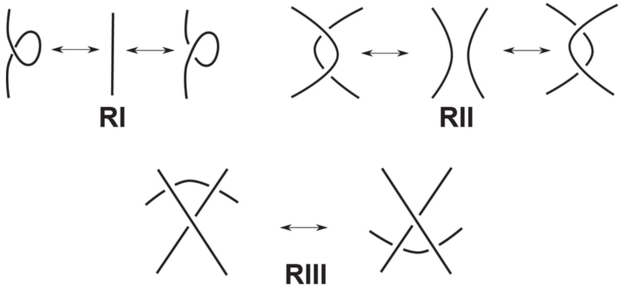
Как и в случае графов, придумать инвариант узлов несложно. Например, минимальное количество самопересечений диаграммы узла, разумеется, является его инвариантом. Однако этот инвариант не очень хорош: никто не умеет его вычислять.

Для того, чтобы задать инвариант, его часто определяют на плоских диаграммах, а затем доказывают, что он принимает одинаковые значения на различных диаграммах объемлюще изотопных узлов.

Очевидно, что следующие преобразования плоских диаграмм узлов преобразуют узлы в эквивалентные:



Очевидно, что следующие преобразования плоских диаграмм узлов преобразуют узлы в эквивалентные:



Theorem (Райдемайстер)

Если две плоские диаграммы представляют один и тот же узел, то любая из них переводится в другую конечной последовательностью указанных выше преобразований.

Благодаря этой теореме, совокупность трех типов преобразований на рисунке называется *движениями Райдемайстера*.

Лекция 10. Инвариант узлов: 3-раскраски

Точки переходов узла на любой его диаграмме разбивают его на дуги. Раскраска дуг диаграммы в один из трех цветов a, b, c называется *правильной*, если в любой точке самопересечения диаграммы сходятся либо дуги одного цвета, либо дуги всех трех цветов.

Точки переходов узла на любой его диаграмме разбивают его на дуги. Раскраска дуг диаграммы в один из трех цветов a, b, c называется *правильной*, если в любой точке самопересечения диаграммы сходятся либо дуги одного цвета, либо дуги всех трех цветов.

Example

Подсчитаем количество правильных 3-раскрасок стандартной диаграммы трилистника.

Theorem

Количество правильных 3-раскрасок дуг диаграммы узла сохраняется при движениях Райдемайстера и является поэтому инвариантом узлов.

Доказательство.

Лекция 10. Скобка Кауфмана диаграммы

Для определения еще одного инварианта узлов — многочлена Джонса — нам понадобится расширить круг объектов, инварианты которых мы определяем. Помимо узлов мы будем рассматривать *зацепления* (“многокомпонентные узлы”) — гладкие невырожденные отображения конечных несвязных наборов окружностей в $\mathbb{R}^3$, $S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1 \to \mathbb{R}^3$. Как и в случае узлов, классы объемлющей изотопии зацеплений можно представлять плоскими диаграммами общего положения.

Лекция 10. Скобка Кауфмана диаграммы

Для определения еще одного инварианта узлов — многочлена Джонса — нам понадобится расширить круг объектов, инварианты которых мы определяем. Помимо узлов мы будем рассматривать *зацепления* (“многокомпонентные узлы”) — гладкие невырожденные отображения конечных несвязных наборов окружностей в $\mathbb{R}^3$, $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \to \mathbb{R}^3$. Как и в случае узлов, классы объемлющей изотопии зацеплений можно представлять плоскими диаграммами общего положения.

Скобка Кауфмана $\langle L \rangle$ диаграммы L зацепления сопоставляет этой диаграмме многочлен Лорана от переменной A по следующему правилу:

Лекция 10. Скобка Кауфмана диаграммы

Для определения еще одного инварианта узлов — многочлена Джонса — нам понадобится расширить круг объектов, инварианты которых мы определяем. Помимо узлов мы будем рассматривать *зацепления* (“многокомпонентные узлы”) — гладкие невырожденные отображения конечных несвязных наборов окружностей в $\mathbb{R}^3$, $S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1 \to \mathbb{R}^3$. Как и в случае узлов, классы объемлющей изотопии зацеплений можно представлять плоскими диаграммами общего положения.

Скобка Кауфмана $\langle L \rangle$ диаграммы L зацепления сопоставляет этой диаграмме многочлен Лорана от переменной A по следующему правилу:

- для стандартной диаграммы неузла этот многочлен равен 1

Лекция 10. Скобка Кауфмана диаграммы

Для определения еще одного инварианта узлов — многочлена Джонса — нам понадобится расширить круг объектов, инварианты которых мы определяем. Помимо узлов мы будем рассматривать *зацепления* (“многокомпонентные узлы”) — гладкие невырожденные отображения конечных несвязных наборов окружностей в $\mathbb{R}^3$, $S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1 \to \mathbb{R}^3$. Как и в случае узлов, классы объемлющей изотопии зацеплений можно представлять плоскими диаграммами общего положения.

Скобка Кауфмана $\langle L \rangle$ диаграммы L зацепления сопоставляет этой диаграмме многочлен Лорана от переменной A по следующему правилу:

- для стандартной диаграммы неузла этот многочлен равен 1
- (**скейн-соотношение**) выполняется равенство

Лекция 10. Скобка Кауфмана диаграммы

Для определения еще одного инварианта узлов — многочлена Джонса — нам понадобится расширить круг объектов, инварианты которых мы определяем. Помимо узлов мы будем рассматривать *зацепления* (“многокомпонентные узлы”) — гладкие невырожденные отображения конечных несвязных наборов окружностей в $\mathbb{R}^3$, $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \to \mathbb{R}^3$. Как и в случае узлов, классы объемлющей изотопии зацеплений можно представлять плоскими диаграммами общего положения.

Скобка Кауфмана $\langle L \rangle$ диаграммы L зацепления сопоставляет этой диаграмме многочлен Лорана от переменной A по следующему правилу:

- для стандартной диаграммы неузла этот многочлен равен 1
- (**скейн-соотношение**) выполняется равенство
- при добавлении к диаграмме зацепления стандартной диаграммы неузла значение скобки Кауфмана умножается на $-(A^2 + A^{-2})$.

Даже если мы начинаем с диаграммы узла, при применении скейн-соотношения возникают диаграммы зацеплений. Скейн-соотношение похоже на соотношение удаления-стягивания для графов. С его помощью можно последовательно уменьшать количество точек самопересечения диаграммы, заменяя всякую диаграмму зацепления линейной комбинацией диаграмм без точек самопересечения. Значения скобки Кауфмана на таких диаграммах вычисляются с помощью первого и третьего правил.

Даже если мы начинаем с диаграммы узла, при применении скейн-соотношения возникают диаграммы зацеплений. Скейн-соотношение похоже на соотношение удаления-стягивания для графов. С его помощью можно последовательно уменьшать количество точек самопересечения диаграммы, заменяя всякую диаграмму зацепления линейной комбинацией диаграмм без точек самопересечения. Значения скобки Кауфмана на таких диаграммах вычисляются с помощью первого и третьего правил.

Theorem

Скобка Кауфмана корректно определена, т.е. результат ее вычисления не зависит от того, в каком порядке применяются скейн-соотношения.

Как нетрудно видеть, скобка Кауфмана не является инвариантом узлов: для двух диаграмм неузла она дает различные ответы. В то же время, справедлива

Theorem

Скобка Кауфмана диаграмм зацеплений сохраняется при втором и третьем движениях Райдемайстера.

Как нетрудно видеть, скобка Кауфмана не является инвариантом узлов: для двух диаграмм неузла она дает различные ответы. В то же время, справедлива

Theorem

Скобка Кауфмана диаграмм зацеплений сохраняется при втором и третьем движениях Райдемайстера.

Для ориентированных диаграмм зацеплений ее, однако, можно подправить таким образом, чтобы результат сохранялся дополнительно и при первом движении Райдемайстера. Определим *знак* точки самопересечения ориентированной диаграммы

Как нетрудно видеть, скобка Кауфмана не является инвариантом узлов: для двух диаграмм неузла она дает различные ответы. В то же время, справедлива

Theorem

Скобка Кауфмана диаграмм зацеплений сохраняется при втором и третьем движениях Райдемайстера.

Для ориентированных диаграмм зацеплений ее, однако, можно подправить таким образом, чтобы результат сохранялся дополнительно и при первом движении Райдемайстера. Определим *знак* точки самопересечения ориентированной диаграммы *Закрученностью* $w(\vec{L})$ ориентированной диаграммы $\vec{L}$ зацепления называется сумма знаков всех ее точек самопересечения.

Как нетрудно видеть, скобка Кауфмана не является инвариантом узлов: для двух диаграмм неузла она дает различные ответы. В то же время, справедлива

Theorem

Скобка Кауфмана диаграмм зацеплений сохраняется при втором и третьем движениях Райдемайстера.

Для ориентированных диаграмм зацеплений ее, однако, можно подправить таким образом, чтобы результат сохранялся дополнительно и при первом движении Райдемайстера. Определим *знак* точки самопересечения ориентированной диаграммы *Закрученностью* $w(\vec{L})$ ориентированной диаграммы $\vec{L}$ зацепления называется сумма знаков всех ее точек самопересечения.

Theorem

Величина $(-A)^{3w(\vec{L})} \cdot \langle L \rangle$ *инвариантна относительно всех трех движений Райдемайстера и является, тем самым, инвариантом ориентированных зацеплений.*

Лекция 10. Многочлен Джонса

Как нетрудно видеть, скобка Кауфмана не является инвариантом узлов: для двух диаграмм неузла она дает различные ответы. В то же время, справедлива

Theorem

Скобка Кауфмана диаграмм зацеплений сохраняется при втором и третьем движениях Райдемайстера.

Для ориентированных диаграмм зацеплений ее, однако, можно подправить таким образом, чтобы результат сохранялся дополнительно и при первом движении Райдемайстера. Определим *знак* точки самопересечения ориентированной диаграммы *Закрученностью* $w(\vec{L})$ ориентированной диаграммы $\vec{L}$ зацепления называется сумма знаков всех ее точек самопересечения.

Theorem

Величина $(-A)^{3w(\vec{L})} \cdot \langle L \rangle$ *инвариантна относительно всех трех движений Райдемайстера и является, тем самым, инвариантом ориентированных зацеплений.*

Результат подстановки $A = t^{1/4}$ в $A^{w(\vec{L})}\langle L \rangle$ называется *многочленом Джонса* ориентированного зацепления. Это многочлен Лорана от переменной $t^{1/2}$.

Семинары 10. Задачи

- Докажите, что количество правильных 3-раскрасок любой плоской диаграммы является натуральной степенью тройки.

Семинары 10. Задачи

- Докажите, что количество правильных 3-раскрасок любой плоской диаграммы является натуральной степенью тройки.
- Найдите количество правильных 3-раскрасок минимальных диаграмм узлов с 4 и 5 точками самопересечений.

- Докажите, что количество правильных 3-раскрасок любой плоской диаграммы является натуральной степенью тройки.
- Найдите количество правильных 3-раскрасок минимальных диаграмм узлов с 4 и 5 точками самопересечений.
- Приведите пример диаграммы узла, не допускающей нетривиальных 3-раскрасок.

- Назовем правильной n-раскраской плоской диаграммы такое отображение множества ее дуг в группу вычетов Z_n по модулю n, что в каждой точке самопересечения сумма вычетов на двух дугах перехода равна удвоенному вычету в дуге прохода. Докажите, что число правильных n-раскрасок является инвариантом узлов.

- Назовем правильной n-раскраской плоской диаграммы такое отображение множества ее дуг в группу вычетов Z_n по модулю n, что в каждой точке самопересечения сумма вычетов на двух дугах перехода равна удвоенному вычету в дуге прохода. Докажите, что число правильных n-раскрасок является инвариантом узлов.
-

Семинары 10. Задачи

- Найдите скобку Кауфмана и многочлен Джонса минимальных диаграмм узлов с 4 и 5 точками самопересечений.

Семинары 10. Задачи

- Найдите скобку Кауфмана и многочлен Джонса минимальных диаграмм узлов с 4 и 5 точками самопересечений.
-