

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА – 2022
ЛИСТОК 8

1. Докажите тождество

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 / t}.$$

2. Найдите $\det'(-\partial_x^2)$ на отрезке $[0, L]$ с граничными условиями Неймана $\partial_x u|_{x=0} = \partial_x u|_{x=L} = 0$. (Штрих у детерминанта означает, что в произведении собственных значений надо выкинуть нулевое собственное значение.)

3. Найдите $\det(-\Delta)$ для круга радиуса R .

4. Докажите, что выражение для детерминанта оператора Лапласа в области D

$$\log \det(-\Delta) = -\frac{1}{12\pi} \oint_{|w|=1} (\phi \partial_n \phi + 2\phi) |dw| + \text{const}$$

с точностью до аддитивной константы не зависит от нормировки конформного отображения $z(w)$ единичного круга на область D ($\phi(w) = \log |z'(w)|$).

5. Докажите, что

$$\oint_{|w|=1} \phi(w) |dw| = 2\pi \log r_0,$$

где $\phi(w) = \log |z'(w)|$, $z(w)$ – конформное отображение единичного диска на область D такое, что $z(0) = 0 \in D$ и $r_0 = z'(0) > 0$ – конформный радиус области D .

6. Докажите, что кривизна $\kappa(z)$ кривой $\Gamma = \partial D$ в точке $z \in \Gamma$, где D – компактная односвязная область в комплексной плоскости, выражается через конформное отображение $w(z)$ области D на единичный круг формулой

$$\kappa(z) = \partial_n \log \left| \frac{w(z)}{w'(z)} \right|, \quad z \in \Gamma.$$

Напоминание: кривизна, по определению, равна $\kappa = d\theta/ds$, где θ – угол, образованный касательным вектором к кривой и вещественной осью, ds – дифференциал дуги кривой.

Указание: Получите сначала выражение для единичного касательного вектора к кривой в терминах $w(z)$.