ОДУ-2022. Семинар №13–14

(28/29 ноября и 29 ноября/2 декабря)

Теоретический материал и задачи для разбора на семинаре

Линейные системы с постоянной матрицей и квазимногочленом в правой части

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + P(t),$$

где $P(t)$ — квазимногочлен с векторными коэффициентами (или, что то же самое, вектор, каждая компонента которого — квазимногочлен с одинаковым показателем). Чтобы решить такую систему, начнём со случая, когда A — жорданова клетка:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} x + e^{\mu t} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \dots \\ p_k(t) \end{pmatrix},$$

где $p_j(t)$ — многочлены степени не выше d. Расписав это покоординатно, получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \lambda x_k + e^{\mu t} p_k(t), \\ \dot{x}_{k-1} &= \lambda x_{k-1} + x_k + e^{\mu t} p_{k-1}(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_1 &= \lambda x_1 + x_2 + e^{\mu t} p_1(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Эту систему можно решать последовательно: сначала найти x_k, потом x_{k-1}, и т.д. При этом если $\lambda \neq \mu$, то каждое x_j будет квазимногочленом степени не выше d, а если $\lambda = \mu$, то степень не превысит $d + k$ (k — размер клетки).

Рассмотрим теперь случай произвольной матрицы A. Тогда $A = TBT^{-1}$, где B — жорданова нормальная форма. Замена $x = Ty$ приводит систему к виду

$$\dot{y} = By + T^{-1}b.$$

Как мы видели, решение этой системы можно искать в виде векторного квазимногочлена степени не выше $d+K$, где K — максимальный размер жордановой клетки с μ на диагонали (в частности, $K = 0$, если таких вообще нет). Но тогда и $x = Ty$ будет квазимногочленом степени не выше $d + K$. Применим этот подход на практике.

Задача 13.1. $\dot{x} = y + 2e^t$, $\dot{y} = x + t^2$.

Решение. Здесь в правой части стоит сумма квазимногочленов. Поэтому общее решение будет суммой решения однородной системы и двух частных, для каждого квазимногочлена отдельно.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_{\text{однор.}}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Следовательно, для квазимногочлена t^2 (где $\mu = 0$) решение нужно искать в виде квазимногочлена степени 2:

$$x(t) = at^2 + bt + c, \quad y(t) = dt^2 + et + f.$$

Подставляя эти выражения в систему, последовательно находим $a = -1$, $d = 0$, $b = 0$, $e = -2$, $c = -2$, $f = 0$. Итак, частное решение имеет вид $x(t) = -t^2 - 2$, $y(t) = -2t$.

Для второго квазимногочлена, $(0,1)^T e^t$, его показатель $\mu = 1$ имеет кратность 1 в спектре матрицы системы, поэтому решение нужно искать в виде виде квазимногочлена степени 1:

$$x(t) = (at+b)e^t, \quad y(t) = (ct+d)e^t.$$

Подставляя это в систему, получаем: $a = c$, $b + a = d + 2$, $d + c = b$. (Система получилась вырожденная, что неудивительно: соответствующая ей однородная система, имеет решение $(a,b,c,d) = (0,1,0,1)$, отвечающее решению $\dot{x} = Ax$.) Отсюда находим $(a,b,c,d) = (1,1,1,0) + C(0,1,0,1)$, $x(t) = (t+1)e^t$, $y(t) = te^t$. ◀

Обратите внимание, что, в отличие от линейных уравнений высокого порядка, частное решение может оказаться квазимногочленом порядка меньше, чем предписано соображениями кратности μ. Это связано с тем, что члены высокой степени могут попасть (после перехода к ЖНФ) в клетки с другими μ или же при решении системы (1) b_k не будет иметь члена степени d, в результате оценки для степеней p_j понизятся.

Задача 13.2. $\dot{x} = y + e^{-t}$, $\dot{y} = x + e^{-t}$.

Решение. Аналогично предыдущей задаче, для $x(t) = (at+b)e^{-t}, \quad y(t) = (ct+d)e^{-t}$ получаем $a = -c$, $a - b = d + 1$, $c - d = b + 1$. Отсюда $a = c = b + d + 1$, то есть $(a,b,c,d) = (0,b,0,-1-b)$. Частное решение будет иметь вид $x(t) = 0$, $y(t) = -e^{-t}$. ◀

Системы с переменными коэффициентами. Определитель Вронского

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x.$$

В общем случае (даже при $n = 2$) решить её не удаётся. Тем не менее кое-что сказать про её решения можно. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — её решения. Тогда составленная из них матрица

$$M = (x_1 | \ldots | x_n)$$

удовлетворяет уравнению $\dot{M} = AM$ (напомним, что если решения x_j независимы, то M называется фундаментальной матрицей системы). На лекции вам доказали, что $W(t) = \det M(t)$ (его называют *определителем Вронского* системы вектор-функций x_j) удовлетворяет уравнению $\dot{W} = \operatorname{tr} A(t) W$. Решая это уравнение, получаем формулу Лиувилля—Остроградского:

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds \right).$$

Геометрически это означает, что можно указать, как меняется объём параллелепипеда, натянутого на векторы $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ с течением времени.

Задача 13.3. Аналогичным образом, рассмотрим уравнение с непостоянными коэффициентами:

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x.$$

Сведите его к системе и напишите аналог формулы Лиувилля—Остроградского.

Решение. Мы полагаем $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}, \ldots, x_n = x^{(n-1)}$. Тогда система приобретёт вид $\dot{x}_1 = x_2, \ldots, \dot{x}_{n-1} = x_n$, $\dot{x}_n = -a_{n-1}x_n - \cdots - a_0 x_1$.

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_{[1]} & \ldots & x_{[n]} \\ \dot{x}_{[1]} & \ldots & \dot{x}_{[n]} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{[1]}^{(n-1)} & \ldots & x_{[n]}^{(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Чтобы не было путаницы в обозначениях, пришлось обозначить здесь $x_{[j]}$ набор решений нашего уравнения (x_j — это координата, а $x^{(j)}$ — j-я производная). При этом $\operatorname{tr} A(t) = -a_{n-1}(t)$, что даёт нам формулу Лиувилля—Остроградского. ◀

Выражение (2) определено для любого набора из n функций и также называется их *определителем Вронского.*

Разберёмся теперь с тем, когда определитель Вронского для набора функций (или вектор-функций) обращается в ноль.

Задача 13.4. Если определитель Вронского вектор-функций или функций хотя бы в одной точке не равен нулю, то набор функций линейно независим.

Обратное, вообще говоря, неверно:

Задача 13.5. Приведите пример двух двумерных вектор-функций, определитель Вронского которых тождественно равен нулю.

Решение. $x_1(t) = (f_1(t), 0)^T$, $x_2(t) = (f_2(t), 0)^T$ будут иметь нулевой определитель Вронского для любых $f_{1,2}$, а линейно зависимыми будут только при пропорциональных. ◀

Однако если $x_1, \ldots, x_n$ — решения линейной системы (или уравнения), то обращение определителя Вронского в одной точке означает линейную зависимость решений. Действительно, если $c_1x_1(t_0) + \cdots + c_nx_n(t_0) = 0$, то задачу Коши $\dot{x} = A(t)x$, $x(t_0) = 0$ решают одновременно $x(t) = c_1x_1(t) + \cdots + c_nx_n(t)$ и $x(t) \equiv 0$. Поэтому они совпадают. Таким образом, неравенство нулю определителя Вронского в одной точке — это критерий того, что набор решений образует фундаментальную систему.

Задача 13.7. Пусть система функций (вектор-функций) $x_1, \ldots, x_n$ на прямой такова, что её определитель Вронского нигде не обращается в ноль. Постройте линейную систему дифференциальных уравнений, решениями которой они являются.

Решение. Если $M = (x_1|\ldots|x_n)$, то нужно положить $A(t) := \dot{M}(t)M^{-1}(t)$. Матрица M обратима, поскольку её определитель не равен нулю.

Для скалярных уравнений можно эту же систему записать по-другому:

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & \ldots & x_n \\ \dot{x} & \dot{x}_1 & \ldots & \dot{x}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{(n)} & x_1^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

Если разложить этот определитель по первому столбцу, получим уравнение n-го порядка для x, причём старший коэффициент не равен нулю: соответствующий ему минор — это как раз определитель Вронского системы $x_1, \ldots, x_n$. Ясно также, что этому уравнению удовлетворяет $x(t) = x_j(t)$ при любом j. ◀

С помощью определителя Вронского можно найти полную систему решений линейного уравнения второго порядка, если известно одно из его решений.

Задача 13.8. Рассмотрим уравнение $y''(2x+1) + 4xy' - 4y = 0$.
(а) Найдите его решение $y_1(x)$, являющееся многочленом от x.
(б) Найдите формулу для определителя Вронского этой системы.
(в) Найдите второе решение этой системы.

Решение. (а) Пусть $y(x) = ax^n + \ldots$. Тогда при подстановке левая часть будет иметь вид $y(x) = 2an(n-1)x^{n-1} + 4nx^n - 4x^n + \cdots = 4(n-1)x^n + \ldots$ (многоточие обозначает члены меньшей степени). Поэтому $n = 1$. Подставляя $y(x) = ax + b$, находим, что $y = x$ является решением.

(б) $W'(x) = -4xW(x)/(2x+1)$. Решая это уравнение, получаем $W(x) = C(2x+1)e^{-2x}$.

(в) Пусть $y_2(x)$ — решение, для которого $W(y_1, y_2) = (2x+1)e^{-2x}$. Тогда $y_1y_2' - y_2y_1' = (2x+1)e^{-2x}$, то есть

$$xy_2' - y_2 = (2x+1)e^{-2x}.$$

Решение однородного уравнения нам известно: $y_2 = y_1 = x$, неоднородное решаем вариацией постоянной: $y_2(x) = C(x)x$. Тогда $x^2C' = (2x+1)e^{-2x}$. Вычисляем интеграл:

$$C(x) = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^{-2x}\,dx = \int \frac{2}{x} e^{-2x}\,dx - \int e^{-2x}\,d\frac{1}{x} = \\ = \int \frac{2}{x} e^{-2x}\,dx - \frac{1}{x}e^{-2x} + \int \frac{1}{x}(-2)e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{x}e^{-2x} + C_0.$$

Итак, можно взять $y_2 = -e^{-2x}$. Общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1x + C_2e^{-2x}$. ◀