ОДУ-2022. Семинар №15

(5/6/9 декабря)

Теоретический материал и задачи для разбора на семинаре

Метод вариации постоянных для линейных систем

Как мы видели, уравнения в вариациях — это линейные неоднородные уравнения. Оказывается, что, как и в одномерном случае, основную трудность в решении неоднородных систем представляет решение однородной системы, а решение неоднородной получается с помощью метода вариции постоянных. Итак, пусть имеется система

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

и пусть $M(t)$ — ФМР соответствующей однородной системы $\dot{x} = A(t)x$ (таким образом, все её решения записываются в виде $x(t) = M(t)c$, где c — постоянный вектор). Далее действуем совершенно аналогично одномерному случаю, только следим за тем, с какой стороны умножать матрицы: искать решение неоднородной системы в виде $x(t) = M(t)c(t)$. Подставив это в исходную систему, получим

$$\dot{M}(t)c(t) + M(t)\dot{c}(t) = A(t)M(t)c(t) + b(t).$$

Сокращая первые члены слева и справа (ведь $\dot{M} = AM$) и умножая оставшееся слева на $M^{-1}(t)$, получаем:

$$\dot{c}(t) = M^{-1}(t)b(t).$$

Задача 15.1. $\dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}$, $\dot{y} = 2x - y$.

Решение. Для однородной системы $\lambda = \pm i$, общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Тогда получаем такую систему:

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t - \cos t & \cos t \\ -2\cos t & \cos t + \sin t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t + \cos t & -\cos t \\ 2\cos t & \sin t - \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} t + 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим $c_1(t) = -\ln|\cos t| + t + c_1^0$, $c_2(t) = 2t + c_2^0$. ◀

Для уравнений высокого порядка столь же логичного способа выписать уравнения на коэффициенты C не получается. Можно, однако, свести уравнение к системе и получить следующее. Пусть дано уравнение

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = b(t)$$

и пусть $x_1, \dots, x_n$ — фундаментальная система решений однородного уравнения. Будем искать решение в виде $x = c_1(t)x_1 + \dots + c_n(t)x_n$. Вспоминая, что для перехода к системе мы каждый x_j заменяем на вектор $X_j = (x_j, \dot{x}_j, \dots, x_j^{n-1})^T$, получаем следующее уравнение:

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{c}_j X_j + \sum_{j=1}^{n} c_j \dot{X}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j A(t) X_j + B(t). \tag{1}$$

Здесь

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

По построению $\dot X_j = A(t)X_j$, поэтому в (1) сокращаются второй член в левой части и первый член в правой. Остальные члены дают такую систему:

$$
\begin{gathered}
\dot c_1 X_1 + \dots + \dot c_n X_n = 0,\\
\dot c_1 \dot X_1 + \dots + \dot c_n \dot X_n = 0,\\
\dots\dots\dots\\
\dot c_1 \dot X_1^{(n-2)} + \dots + \dot c_n \dot X_n^{(n-2)} = 0,\\
\dot c_1 \dot X_1^{(n-1)} + \dots + \dot c_n \dot X_n^{(n-1)} = b(t).
\end{gathered}
$$

Задача 15.2. Напишите однородное линейное ДУ второго порядка (с единичным коэффициентом перед $\ddot x$), решениями которого будут $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$. Решите соответствующее неоднородное уравнение с $b(t) = t$ в правой части.

Решение. Как мы видели на прошлом семинаре, такое уравнение имеет вид

$$
\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ \dot x & \dot x_1 & \dot x_2 \\ \ddot x & \ddot x_1 & \ddot x_2 \end{vmatrix} = 0,
$$

то есть $t^2\ddot x - \dot x t + x = 0$. Итак, нам нужно решить уравнение

$$
\ddot x - \frac{1}{t}\dot x + \frac{1}{t^2}x = t.
$$

Будем искать решение в виде $x = C_1x_1 + C_2x_2 = C_1(t)t + C_2(t)t^2$. Система уравнений на $C_{1,2}$ имеет вид

$$
\begin{gathered}
t\dot C_1 + t^2\dot C_2 = 0,\\
1\dot C_1 + 2t\dot C_2 = t.
\end{gathered}
$$

Отсюда находим $\dot C_1 = -t$, $\dot C_2 = 1$, то есть $C_1 = -t^2/2 + C_1^0$, $C_2 = t + C_2^0$. Окончательно

$$
x(t) = t(-t^2/2 + C_1^0) + t^2(t + C_2^0) = \frac{t^3}{2} + C_1^0 t + C_2^0 t^2.
$$

◀

Задача 15.3. Составьте однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с единичным коэффициентом при старшей производной $\ddot x(t)$, для которого функции $x_1(t) = 1$ и $x_2(t) = \cos t$ являются базисом линейного пространства всех решений (ФСР). Решите соответствующее неоднородное уравнение с $f(t) = 1/\sin t$ в правой части.

Решение. Составляем определитель Вронского

$$
\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x(t) \\ \dot x_1(t) & \dot x_2(t) & \dot x(t) \\ \ddot x_1(t) & \ddot x_2(t) & \ddot x(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos t & x(t) \\ 0 & -\sin t & \dot x(t) \\ 0 & -\cos t & \ddot x(t) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot x - \dot x \operatorname{ctg} t = 0.
$$

Уравнение определено на интервалах вещественной оси, не включающих точек $t_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, в которых обращается в нуль вронскиан заданных функций: $W[x_1(t), x_2(t)] = -\sin t$.

Для построения общего решения неоднородного уравнения

$$
\ddot x - \dot x \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\sin t}
$$

необходимо найти какое-нибудь частное решение. Применяем метод вариации постоянных, то есть, ищем частное решение $\tilde x(t)$ в виде линейной комбинации:

$$
\tilde x = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) = C_1(t) + C_2(t)\cos t,
$$

где функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ удовлетворяют системе линейных уравнений первого порядка:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{0} \\ f(t) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{C}_1 + \cos t\, \dot{C}_2 & = & 0 \\ \quad -\sin t\, \dot{C}_2 & = & 1/\sin t \end{cases}$$

Из второго уравнения находим

$$C_2(t) = \operatorname{ctg} t + A,$$

и после этого из первого уравнения получаем $C_1(t)$:

$$\dot{C}_1 = \frac{\cos t}{\sin^2 t} \quad \Rightarrow \quad C_1(t) = -\frac{1}{\sin t} + B.$$

В итоге, общее решение неоднородного уравнения принимает вид:

$$x(t) = -\sin t + A\cos t + B,$$

где A и B — произвольные вещественные константы. ◀

∗Дифференцирование решений по параметру. Уравнение в вариациях

Этот материал будет разобран на неделе 12–16 декабря.

Рассмотрим задачу Коши, зависящую от параметра:

$$\dot{x} = f(x, t, \lambda), \quad x(t_0) = x_0(\lambda) \tag{2}$$

При каждом λ она имеет решение $x(t, \lambda) = x_\lambda(t)$ и, как было показано на лекции, $x(t, \lambda)$ дифференцируема по λ.

Замечание. (Объяснять это студентам необязательно, только если спросят.) Формально говоря, на лекции был рассмотрен случай, когда λ содержится только в начальном условии: $\dot{x} = f(x, t)$, $x(t_0) = \lambda$. Общий случай сводится к нему таким образом. Имея систему (2), рассмотрим новую систему, добавив к x дополнительные фазовые переменные y в количестве, равном размерности параметра λ. Тогда система

$$\dot{x} = f(x, t, y), \quad \dot{y} = 0, \quad x(t_0) = x_0(\lambda), \quad y(t_0) = \lambda$$

будет содержать параметр только в начальных условиях, а её решения совпадают с решениями системы (2) (точнее, если $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ — решение этой системы, то $y_\lambda(t) \equiv \lambda$, а $x_\lambda(t)$ — решение (2)).

Дифференцируемость по параметру требует нетривиального доказательства, однако уравнение для производной можно восстановить дифференцированием системы (2) по λ (точнее, по λ_j, если λ многомерно). Итак, дифференцируя по λ_j в точке $\lambda = \lambda^0$, мы получим

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j}(\dot{x}) = \frac{\partial}{\partial \lambda_j} f(x, t, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}.$$

Производные в левой части можно поменять местами (это опять же следует из доказательства теоремы о дифференцировании по параметру), поэтому, если обозначить $z = (\partial x/\partial \lambda_j)|_{\lambda=\lambda^0}$, мы получим

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{\lambda^0}(t), t, \lambda^0) z + \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x_{\lambda^0}(t), t, \lambda^0). \tag{3}$$

Это уравнение называется *уравнением в вариациях*. Обратите внимание, что это линейное неоднородное уравнение. Начальное условие $x(t_0) = x_0(\lambda)$ мы также дифференцируем и находим

$$z(t_0) = \left.\frac{\partial x_\lambda(t_0)}{\partial \lambda_j}\right|_{\lambda=\lambda^0} = \left.\frac{\partial x_0}{\partial \lambda_j}\right|_{\lambda=\lambda^0}.$$

Таким образом, если нам известно решение $x_{\lambda^0}(t)$ при некотором значении параметра λ^0, то для поиска производной не нужно находить явно все решения системы (2), достаточно лишь решить уравнение в вариациях.

Для вычисления высших производных можно далее дифференцировать (3) либо брать разложения Тейлора решения $x_\lambda(t)$ по степеням $(\lambda-\lambda^0)$ и выписывать коэффициенты. После подстановки в уравнение нужно будет воспользоваться тем, что производная по t остаточного члена в этой формуле Тейлора даст остаточный член в формуле для производной (опять-таки, это можно аккуратно вывести, мы принимаем это без доказательства). Мы разберём это на конкретных примерах.

Задача 15.4. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x}=4ty^2,\quad \dot{y}=1+5\mu x,\quad x(0)=y(0)=0.$$

Требуется найти решение при $\mu=0$ и его первые производные по μ: $\partial x(t,\mu)/\partial\mu|_{\mu=0}$, $\partial y(t,\mu)/\partial\mu|_{\mu=0}$.

Решение. В этом примере параметр μ в начальные данные не входит. Зависимость правых частей уравнений системы от x, y и μ полиномиальная, поэтому решение можно дифференцировать по параметру сколько угодно раз. Заметим, что в точке $\mu=0$ наша система решается точно:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_{(0)}}{dt}=4ty_{(0)}^2 & x_{(0)}(0)=0 \\ \dfrac{dy_{(0)}}{dt}=1 & y_{(0)}(0)=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad y_{(0)}(t)=t \quad\Rightarrow\quad x_{(0)}(t)=t^4.$$

Обозначим искомые производные $\xi=(\partial x/\partial\mu)|_{\mu=0}$, $\eta=(\partial y/\partial\mu)|_{\mu=0}$. Дифференцируя систему по μ, мы получаем

$$\dot{\xi}=4t2y\eta,\quad \dot{\eta}=5x+5\mu\xi,\quad \xi(0)=\eta(0)=0.$$

Подставляя сюда $y=y_{(0)}=t$, $x=x_{(0)}=t^4$, $\mu=0$, получаем

$$\dot{\xi}=8t^2\eta,\quad \dot{\eta}=5t^4,\quad \xi(0)=\eta(0)=0.$$

Отсюда $\eta(t)=t^5$, $\xi(t)=t^8$. ◀

Задача 15.5. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt}=x^2+\frac{2\mu}{t},\quad x(1)=\mu-1. \tag{4}$$

Найти явное решение для некоторого значения μ_0 параметра и производную $(\partial x/\partial\mu)|_{\mu=\mu_0}$.

Решение. Будем решать эту систему в области $t>0$, в которой лежит начальный момент $t=1$, поскольку правая часть $f(t,x,\mu)=x^2+2\mu/t$ должна быть непрерывна по своим аргументам. Заметим, что зависимость от параметра μ у правой части уравнения и функции начальных данных $a(\mu)$ полиномиальная, что допускает разложение до любого порядка по μ.

Выделенное значение параметра, при котором наша система решается точно, видно сразу: это $\mu_0=0$. На функцию главного приближения $x_{(0)}(t)$ получаем такую задачу Коши:

$$\frac{dx_{(0)}}{dt}=x_{(0)}^2,\quad x_{(0)}(1)=-1,$$

которая легко решается явно: $x_{(0)}(t)=-1/t$.

В данном примере $\Delta\mu=\mu-\mu_0=\mu$ и мы приходим к такому разложению точного решения в окрестности $\mu_0=0$:

$$x(t,\mu)=x_{(0)}(t)+\mu\,x_{(1)}(t)+\frac{\mu^2}{2}\,x_{(2)}(t)+\dots \tag{5}$$

При этом функция начальных данных $a(\mu) = -1 + \mu$ уже разложена в ряд по μ в нужном нам виде. Подставляя разложение $x(t, \mu)$ в правую часть уравнения задачи (4), получаем равенство:

$$x^2 + \frac{2\mu}{t} = x_{(0)}^2 + 2\mu\,(x_{(0)}x_{(1)} + 1/t) + \mu^2(x_{(1)}^2 + x_{(0)}x_{(2)}) + \dots$$

тогда как слева будет стоять производная по времени от ряда (5). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в уравнении и в начальных данных $x(1, \mu) = a(\mu)$, получим на $x_{(0)}(t)$ уже решенную задачу (), а на последующие коэффициентные функции такие уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_{(1)}}{dt} = 2x_{(0)}x_{(1)} + \dfrac{2}{t} = -\dfrac{2}{t}\,x_{(1)} + \dfrac{2}{t} \\ x_{(1)}(1) = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x_{(1)}(t) = 1,$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_{(2)}}{dt} = 2(x_{(1)}^2 + x_{(0)}x_{(2)}) = 2 - 2\,\dfrac{x_{(2)}}{t} \\ x_{(2)}(1) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x_{(2)}(t) = \frac{2}{3}\left(t - \frac{1}{t^2}\right).$$

Итак, мы получаем решение исходного нелинейного уравнения в виде ряда по μ с известными коэффициентами:

$$x(t, \mu) = -\frac{1}{t} + \mu + \frac{\mu^2}{3}\left(t - \frac{1}{t^2}\right) + o(\mu^2), \quad t > 0.$$

◄

Задача 15.6. Рассмотрим систему $\ddot{x} + \sin x = 0$, $x(0) = \lambda$, $\dot{x}(0) = 0$ (она описывает колебания маятника). Разложите решение по степеням λ до третьей включительно.

Решение. Решение при $\lambda = 0$ очевидно — $x(t) \equiv 0$. Итак, будем искать разложение

$$x(t) = 0 + a_1(t)\lambda + a_2(t)\lambda^2 + a_3(t)\lambda^3 + o(\lambda^3).$$

Дифференцируем это выражение по t и, считая, что $(d/dt)o(\lambda^3) = o(\lambda^3)$, подставляем в нашу систему:

$$\ddot{a}_1(t)\lambda + \ddot{a}_2(t)\lambda^2 + \ddot{a}_3(t)\lambda^3 = -\sin(a_1(t)\lambda + a_2(t)\lambda^2 + a_3(t)\lambda^3) + o(\lambda^3).$$

Учитывая разложение для синуса, а также начальные условия для a_j (они получаются разложением по λ начальных условий в исходной задаче), получаем такие задачи Коши:

$$\begin{aligned} &\ddot{a}_1 = -a_1, && a_1(0) = 1, \dot{a}_1(0) = 0, \\ &\ddot{a}_2 = -a_2, && a_2(0) = 0, \dot{a}_2(0) = 0, \\ &\ddot{a}_3 = -a_3 + \frac{a_1^3}{6}, && a_3(0) = 0, \dot{a}_3(0) = 0. \end{aligned}$$

Уравнение $\ddot{y} + y = 0$ имеет решением $a\cos t + b\sin t$, поэтому мы сразу получаем $a_1(t) = \cos t$, $a_2(t) = 0$. Для a_3 у нас получается неоднородное уравнение:

$$\ddot{a}_3 + a_3 = \frac{1}{6}\cos^3 t = \frac{1}{6}\frac{\cos 3t + 3\cos t}{4}.$$

В этом месте можно остановиться и обсудить только следующий вопрос: справа возникает квазимногочлен с $\lambda = \pm i$ — корнями характеристического уравнения. То есть соответствующую часть частного решения нужно искать в виде $t(a\cos t + b\sin t)$: амплитуда его колебаний растёт с ростом t. Как же это возможно, если колебания маятника, естественно, остаются ограниченными? На самом деле эти колебания уравновешиваются также растущим с ростом t остаточным членом $o(\lambda^3)$.

В сущности, это «противоречие» не более удивительно, чем разложение функции $\sin((1+\mu)t)$ по степеням μ:

$$\sin((1+\mu)t) = \sin t \cos \mu t + \cos t \sin \mu t = \\ = \sin t(1 + O(\mu^2)) + \cos t(\mu t + O(\mu^3)) = \sin t + \mu t \cos t + O(\mu^2).$$

В нашей задаче механизм тот же самый: резонанс возникает за счёт того, что частота колебаний маятника всё же зависит от амплитуды.

Если же время останется, можно вспомнить то, что мы делали на прошлой неделе, и дорешать задачу до конца:

$$a_3(t) = \frac{\cos t - \cos 3t}{192} + \frac{3t}{8}\sin t.$$

◀