Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

В следующий раз предполагается в первую очередь обсудить задачи, оставшиеся с позапрошлого раза. На прошлой встрече была явно сформулирована только одна домашняя задача (задача 2 из списка ниже); я, однако, добавил в этот список несколько несложных утверждений из коммутативной алгебры, доказательство которых было опущено на лекции.

Задания с 9 занятия.

Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать ДО УТРА СРЕДЫ 07.12. Как обычно, ПРОСЬБА ПРИСЫЛАТЬ на проверку НЕ БОЛЕЕ ТРЕХ из этих задач — те, которые покажутся наиболее значимыми и интересными.

(1) Здесь собраны утверждения про целые расширения колец, доказательство которых было пропущено (или только намечено) на последней лекции. Регулярное отображение аффинных многообразий $f : X \to Y$ называется *конечным*, если $f(X)$ плотно в Y (т.е. отображение $f^* : \mathbf{k}[Y] \to \mathbf{k}[X]$ является вложением) и $\forall\ b \in \mathbf{k}[X]$ удовлетворяет некоторому соотношению $b^m + a_1 b^{m-1} + \ldots + a_m = 0$, где все $a_i \in f^*(\mathbf{k}[Y])$.

  (a) Покажите, что последнее условие в определении конечного отображения равносильно тому, что $\mathbf{k}[X]$ является конечнопорожденным $f^*(\mathbf{k}[Y])$-модулем.

  (b) Покажите, что композиция конечных отображений является конечным отображением.

  (c) Покажите, что если Z замкнутое подмножество в X, то ограничение f на Z также является конечным отображением $f|_Z : Z \to f(Z)$.

  (d) Покажите, что если U — главное аффинное открытое подмножество в Y, то $V = f^{-1}(U)$ — главное аффинное открытое подмножество в X, и ограничение f на V также является конечным отображением $f|_V : V \to U$.

(e) Покажите, что если $f : X \to Y$ — регулярное отображение аффинных многообразий, и существует такое покрытие Y аффинными открытыми множествами U_α, что $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ аффинны и ограничения $f|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U_\alpha$ конечны, то f тоже конечно.

(2) Пусть плоская кривая $X \subset \mathbb{P}^2$ задана в аффинной карте $x_0 \neq 0$ параметрически, т.е. $x = f(t)$, $y = g(t)$, где $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$. Напишите явное параметрическое уравнение двойственной кривой $\check{X} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ в аффинной карте $a_0 \neq 0$ ($(a_0 : a_1 : a_2)$ это координаты точки в $\check{\mathbb{P}}^2$, отвечающей прямой в $\mathbb{P}^2$ с уравнением $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$), а затем таким же образом напишите уравнение кривой, двойственной к $\check{X}$, и убедитесь, что

$$\check{\check{X}} = X.$$