Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Задания с 8 занятия.

Эти задачи (в первую очередь 3 и 4) очень важны для понимания всего курса, поэтому на их обдумывание дается еще неделя. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать ДО УТРА СРЕДЫ 07.12. Как обычно, ПРОСЬБА ПРИСЫЛАТЬ на проверку НЕ БОЛЕЕ ТРЕХ из этих задач — те, которые покажутся наиболее значимыми и интересными.

(1) Покажите, как при вложении Сегре $s : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{mn+m+n}$ задать однородными уравнениями в $\mathbb{P}^{mn+m+n}$ образ $s(X)$ множества X, заданного в $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ уравнением $F(x_0 : \ldots : x_n, y_0 : \ldots : y_m)$, однородным степени d_1 по переменным $x_0, \ldots, x_n$ и степени d_2 по переменным $y_0, \ldots, y_m$, при $d_1 \neq d_2$.

(2) Отображение е Веронезе $v_{n,d} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ $\left(N = \binom{n+d}{d} - 1\right)$, задается формулами $u_I = x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}$ (здесь x_i это координаты в $\mathbb{P}^n$, $I = (i_0, \ldots, i_n)$ — мультииндекс, $i_0 + \ldots + i_n = d$, а u_I это координаты в $\mathbb{P}^N$). Докажите, что образ отображения отображения Веронезе $v_{n,d}(\mathbb{P}^n)$ задается в $\mathbb{P}^N$ всевозможными уравнениями вида $u_I u_J = u_K u_L$, где $I + J = K + L$.

(3) Вопросы про $v_{1,3} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$; мы выяснили, что $X = v_{1,3}(\mathbb{P}^1)$ это пространственная кубическая кривая, она называется *нормкубикой*.

   (a) Найдите размерность пространства квадрик, проходящих через X.

   (b) Найдите геометрическое описание особых квадрик, проходящих через X.

   (c) Докажите, что через любую точку $\mathbb{P}^3$, не лежащую на X, проходит ровно одна хорда (или касательная) кривой X.

   (d) Покажите, что образом X при проектировании из точки $M \in \mathbb{P}^3$ будет декартов лист, полукубическая парабола или коника, в зависимости от того, лежит ли точка M на хорде или касательной к X вне X, или же на кривой X.

(e) Покажите, что композиция $v_{1,3}$ и проектирований из предыдущего пункта представляет собой отображение неполным линейным рядом кубических многочленов, удовлетворяющих, соответственно, следующим условиям: многочлены, принимающие равные в двух фиксированных точках; многочлены, производная которых обращается в 0 в некоторой фиксированной точке; многочлены, обращающиеся в 0 в некоторой фиксированной точке.

(4) Вопросы про $v_{2,2} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ и некоторые отображения неполными рядами квадрик.

(a) Какое многообразие заметается хордами поверхности $v_{2,2}(\mathbb{P}^2)$?

(b) Рассмотрим рациональное отображение $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^4$, где $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}(W^*)$, а W это пространство всех квадратичных форм, обращающихся в 0 в некоторой фиксированной точке $A \in \mathbb{P}^2$. Тогда отображение f не определено в точке A. Докажите, что f является биекцией на $\mathbb{P}^2 \setminus A$. Найдите $\overline{X} \setminus X$, где $X = f(\mathbb{P}^2 \setminus A)$, а $\overline{X}$ это замыкание множества X в $\mathbb{P}^4$.

(c) Рассмотрим рациональное отображение $g : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3$, где $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(U^*)$, а U это пространство всех квадратичных форм, обращающихся в 0 в двух различных фиксированных точках $A, B \in \mathbb{P}^2$. Тогда отображение g не определено в точках A и B. Обозначим прямую AB через l. Докажите, что g регулярно на $\mathbb{P}^2 \setminus \{A, B\}$ и является биекцией на $\mathbb{P}^2 \setminus l$. Найдите $g(l \setminus \{A, B\})$. Найдите $\overline{X}$ (это поверхность в $\mathbb{P}^3$!) и $\overline{X} \setminus X$, где $X = g(\mathbb{P}^2 \setminus \{A, B\})$, а $\overline{X}$ это замыкание множества X в $\mathbb{P}^3$.

(d) Рассмотрим рациональное отображение $h : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, где $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(Z^*)$, а Z это пространство всех квадратичных форм, обращающихся в 0 в трех различных фиксированных точках $A, B, C \in \mathbb{P}^2$, не лежащих на одной прямой. Тогда отображение h не определено в точках A, B и C. Докажите, что h регулярно на $\mathbb{P}^2 \setminus \{A, B, C\}$ и является биекцией вне прямых AB, BC и AC. Найдите образы этих прямых (с выколотыми точками A, B и C). Покажите, что при подходящем выборе координат это отображение, определенное вне трех прямых, инволютивно.