Инварианты графов, узлов и вложенных графов

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Лекция 11. О сравнении инвариантов узлов

Как и в случае графов и других комбинаторных объектов, так и в случае узлов, инварианты можно сравнивать между собой — говорить о том, какие из них эффективнее вычисляются, какие различают больше объектов. При этом сравнение не всегда позволяет сказать, какой из инвариантов лучше: если первый инвариант различает узлы A и B, но принимает одинаковые значения на узлах A и C, тогда как второй различает узлы A и C, но не различает A и B, то мы не можем сказать, какой из них сильнее.

Как и в случае графов и других комбинаторных объектов, так и в случае узлов, инварианты можно сравнивать между собой — говорить о том, какие из них эффективнее вычисляются, какие различают больше объектов. При этом сравнение не всегда позволяет сказать, какой из инвариантов лучше: если первый инвариант различает узлы A и B, но принимает одинаковые значения на узлах A и C, тогда как второй различает узлы A и C, но не различает A и B, то мы не можем сказать, какой из них сильнее.

Введенное около 1990 г. В. А. Васильевым понятие инварианта узлов конечного порядка позволяет, в частности, определить "абсолютную силу" инварианта и сравнивать между собой числовые значения этой силы, а не сами инварианты. Сравнение числовых значений очень упрощает задачу сравнения инвариантов. Определение абсолютной силы осуществляется за счет исчерпания бесконечномерного пространства инвариантов конечномерными пространствами.

Лекция 11. Особые узлы

Для определения инвариантов узлов конечного порядка нам понадобится расширить класс узлов, позволив им иметь простейшие особенности — простые двойные точки. Для определенности ниже мы будем говорить только об узлах, хотя все сказанное без существенных изменений переносится на зацепления.

Для определения инвариантов узлов конечного порядка нам понадобится расширить класс узлов, позволив им иметь простейшие особенности — простые двойные точки. Для определенности ниже мы будем говорить только об узлах, хотя все сказанное без существенных изменений переносится на зацепления.

Definition

Особым узлом называется гладкое невырожденное отображение $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$, переводящее некоторые пары различных точек $t_1, t_2 \in S^1, t_1 \neq t_2$ в одну и ту же точку пространства $K(t_1) = K(t_2)$, притом, что никакие три различные точки не переходят в одну и ту же точку, а касательные прямые к двум дугам узла в точке $K(t_1) = K(t_2)$ различны.

Лекция 11. Особые узлы

Для определения инвариантов узлов конечного порядка нам понадобится расширить класс узлов, позволив им иметь простейшие особенности — простые двойные точки. Для определенности ниже мы будем говорить только об узлах, хотя все сказанное без существенных изменений переносится на зацепления.

Definition

Особым узлом называется гладкое невырожденное отображение $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$, переводящее некоторые пары различных точек $t_1, t_2 \in S^1, t_1 \neq t_2$ в одну и ту же точку пространства $K(t_1) = K(t_2)$, притом, что никакие три различные точки не переходят в одну и ту же точку, а касательные прямые к двум дугам узла в точке $K(t_1) = K(t_2)$ различны.

Из условий гладкости и невырожденности вытекает, что множество пар точек с общим образом конечно. Как и обычные, особые узлы можно изображать плоскими диаграммами — в особых точках не указываются проходы и переходы.

Объемлющая изотопия определяется для особых узлов так же, как для обычных. Каждому инварианту f обычных узлов можно сопоставить инвариант особых узлов (который мы обозначаем тем же символом f) следующим образом.
Предположим, что инвариант f определен для всех особых узлов с не более, чем $k-1$ самопересечениями. Выберем произвольную точку самопересечения особого узла с k пересечениями и определим *продолжение инварианта* f на этот узел следующим правилом (*скейн-соотношением Васильева*):

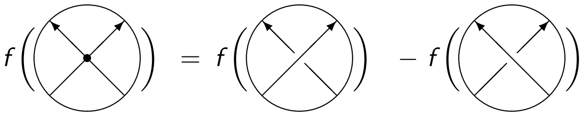


Рис.: Продолжение инварианта на особые узлы

Лекция 11. Продолжение инварианта на особые узлы

Объемлющая изотопия определяется для особых узлов так же, как для обычных.
Каждому инварианту f обычных узлов можно сопоставить инвариант особых узлов (который мы обозначаем тем же символом f) следующим образом.
Предположим, что инвариант f определен для всех особых узлов с не более, чем $k-1$ самопересечениями. Выберем произвольную точку самопересечения особого узла с k пересечениями и определим *продолжение инварианта* f на этот узел следующим правилом (*скейн-соотношением Васильева*):

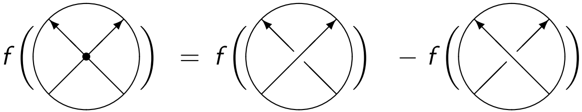


Рис.: Продолжение инварианта на особые узлы

Lemma

Продолжение инварианта корректно определено, т.е. оно не зависит от того, в каком порядке разрешаются особые точки.

Лекция 11. Инварианты конечного порядка

Центральное определение теории:

Definition

Инвариант узлов называется *инвариантом порядка на выше* k, если его продолжение на особые узлы с $k+1$ точками самопересечения тождественно равно 0.

Центральное определение теории:

Definition

Инвариант узлов называется *инвариантом порядка на выше* k, если его продолжение на особые узлы с $k+1$ точками самопересечения тождественно равно 0.

Разумеется, в этом случае тождественно обращается в 0 и продолжение этого инварианта на все особые узлы с $\geq k+1$ точками самопересечения.

Лекция 11. Инварианты конечного порядка

Центральное определение теории:

Definition

Инвариант узлов называется *инвариантом порядка на выше k*, если его продолжение на особые узлы с $k+1$ точками самопересечения тождественно равно 0.

Разумеется, в этом случае тождественно обращается в 0 и продолжение этого инварианта на все особые узлы с $\geq k+1$ точками самопересечения.
Все инварианты порядка не выше k со значениями в поле $\mathbb{C}$ образуют векторное пространство над $\mathbb{C}$, обозначаемое $\mathcal{V}_k$. Эти пространства вложены друг в друга:

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \dots .$$

Объединение всех этих пространств называется пространством *инвариантов конечного порядка*.

Центральное определение теории:

Definition

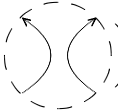
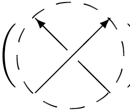
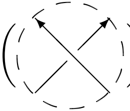
Инвариант узлов называется *инвариантом порядка на выше* k, если его продолжение на особые узлы с $k+1$ точками самопересечения тождественно равно 0.

Разумеется, в этом случае тождественно обращается в 0 и продолжение этого инварианта на все особые узлы с $\geq k+1$ точками самопересечения.
Все инварианты порядка не выше k со значениями в поле $\mathbb{C}$ образуют векторное пространство над $\mathbb{C}$, обозначаемое $\mathcal{V}_k$. Эти пространства вложены друг в друга:

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \dots .$$

Объединение всех этих пространств называется пространством *инвариантов конечного порядка*.
Гипотеза. Любые два различных узла различаются некоторым инвариантом конечного порядка.

Многочлен Конвея $\mathrm{Con}(L)$ зацепления L это многочлен от одной переменной x, определяемый скейн-соотношением

$x \cdot \mathrm{Con}\Bigg($  $\Bigg) = \mathrm{Con}\Bigg($  $\Bigg) - \mathrm{Con}\Bigg($  $\Bigg)$

и начальным условием $\mathrm{Con}(\text{диаграмма неузла}) = 1$.

Example

Вычислим многочлен Конвея трилистника:

Лекция 11. Пример инвариантов конечного порядка

Theorem

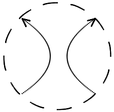
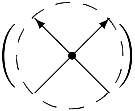
Коэффициент C_n при x^n в многочлене Конвея является инвариантом порядка не выше n.

Лекция 11. Пример инвариантов конечного порядка

Theorem

Коэффициент C_n при x^n в многочлене Конвея является инвариантом порядка не выше n.

Доказательство. Продолжим многочлен Конвея на особые узлы в соответствии со скейн-соотношением Васильева:

$x \cdot \mathrm{Con}\Big($  $\Big) = \mathrm{Con}\Big($  $\Big)$.

Согласно скейн-соотношению Конвея, продолжение многочлена Конвея на особые узлы с $n+1$ точками самопересечения делится на x^{n+1}. Поэтому коэффициент при x^n в продолженном многочлене равен 0. Значит, коэффициент при x^n является инвариантом порядка не выше n.

Каждому особому узлу $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$ можно сопоставить его хордовую диаграмму. Это окружность-прообраз S^1, хорды в которой образованы прообразами двойных точек. Объемлюще изотопные особые узлы имеют изоморфные хордовые диаграммы.

Лекция 11. Хордовые диаграммы особых узлов

Каждому особому узлу $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$ можно сопоставить его хордовую диаграмму. Это окружность-прообраз S^1, хорды в которой образованы прообразами двойных точек. Объемлюще изотопные особые узлы имеют изоморфные хордовые диаграммы.

Theorem

Инвариант узлов порядка не выше k принимает одинаковые значения на особых узлах с k двойными точками, имеющих одинаковые хордовые диаграммы.

Лекция 11. Хордовые диаграммы особых узлов

Каждому особому узлу $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$ можно сопоставить его хордовую диаграмму. Это окружность-прообраз S^1, хорды в которой образованы прообразами двойных точек. Объемлюще изотопные особые узлы имеют изоморфные хордовые диаграммы.

Theorem

Инвариант узлов порядка не выше k принимает одинаковые значения на особых узлах с k двойными точками, имеющих одинаковые хордовые диаграммы.

Corollary

При любом $k = 0, 1, 2, \dots$ пространство $\mathcal{V}_k$ конечномерно.

Лекция 11. Хордовые диаграммы особых узлов

Каждому особому узлу $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$ можно сопоставить его хордовую диаграмму. Это окружность-прообраз S^1, хорды в которой образованы прообразами двойных точек. Объемлюще изотопные особые узлы имеют изоморфные хордовые диаграммы.

Theorem

Инвариант узлов порядка не выше k принимает одинаковые значения на особых узлах с k двойными точками, имеющих одинаковые хордовые диаграммы.

Corollary

При любом $k = 0, 1, 2, \dots$ пространство $\mathcal{V}_k$ конечномерно.

Corollary

Всякий инвариант узлов порядка не выше k определяет функцию на хордовых диаграммах с k хордами.

Theorem

Инвариант узлов порядка не выше k принимает одинаковые значения на особых узлах с k двойными точками, имеющих одинаковые хордовые диаграммы.

Theorem

Инвариант узлов порядка не выше k принимает одинаковые значения на особых узлах с k двойными точками, имеющих одинаковые хордовые диаграммы.

Доказательство. Пусть K_1, K_2 — два особых узла с k точками простого самопересечения, хордовые диаграммы которых совпадают. Осуществим объемлющую изотопию особого узла K_2, переводящую его в особый узел, совпадающий с K_1 в малой окрестности кажллой из его двойных точек. Тогда существует последовательность скейн-соотношений Васильева, отвечающих $k+1$-й двойной точке, соединяющая особый узел K_1 с особым узлом K_2:

Theorem

Инвариант узлов порядка не выше k принимает одинаковые значения на особых узлах с k двойными точками, имеющих одинаковые хордовые диаграммы.

Доказательство. Пусть K_1, K_2 — два особых узла с k точками простого самопересечения, хордовые диаграммы которых совпадают. Осуществим объемлющую изотопию особого узла K_2, переводящую его в особый узел, совпадающий с K_1 в малой окрестности кажллой из его двойных точек. Тогда существует последовательность скейн-соотношений Васильева, отвечающих $k+1$-й двойной точке, соединяющая особый узел K_1 с особым узлом K_2:

При таких прохождениях через особые узлы с дополнительной двойной точкой значение инварианта порядка не выше k не изменяется, поэтому его значения на K_1 и K_2 совпадают.

Corollary

Всякий инвариант узлов порядка не выше k определяет функцию на хордовых диаграммах с k хордами.

Функции на хордовых диаграммах, определяемые инвариантами узлов конечного порядка, представляют особый интерес. Первый вопрос о них, который естественно задать, следующий: верно ли, что любую функцию на хордовых диаграммах можно получить из некоторого инварианта конечного порядка? Ответ отрицательный — оказывается, такие функции должны удовлетворять некоторым соотношениям.

Theorem (В. А. Васильев)

Всякая функция f на хордовых диаграммах, определяемая инвариантом конечного порядка, удовлетворяет следующим 4-членным соотношениям:

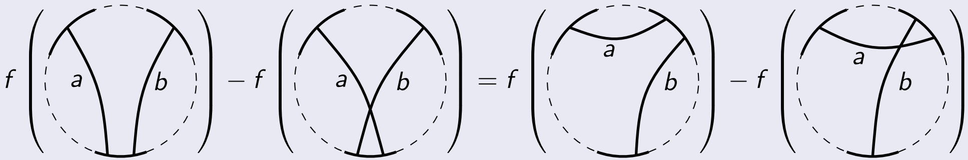
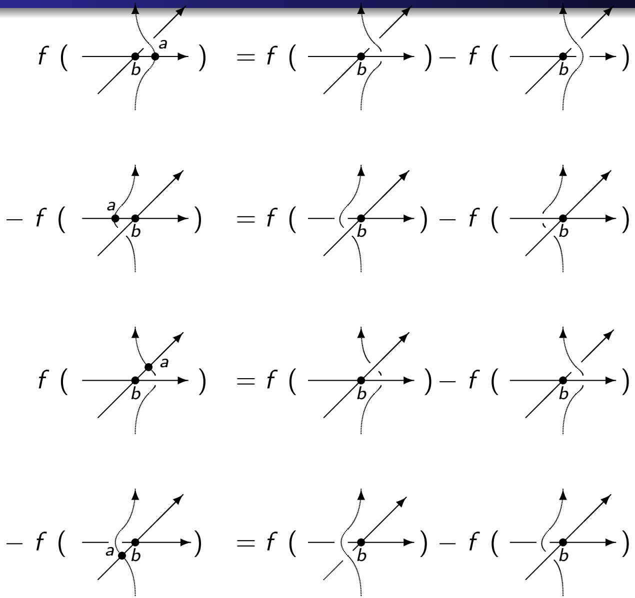


Рис.: 4-членное соотношение для хордовых диаграмм

Лекция 11. 4-членные соотношения: доказательство



Theorem (М. Концевич)

Всякая функция на хордовых диаграммах со значениями в поле $\mathbb{C}$, удовлетворяющая 4-членным соотношениям Васильева, происходит из некоторого инварианта конечного порядка.

Это не совсем точная формулировка теоремы, которая, однако, достаточна для целей нашего курса.

Theorem (М. Концевич)

Всякая функция на хордовых диаграммах со значениями в поле $\mathbb{C}$, удовлетворяющая 4-членным соотношениям Васильева, происходит из некоторого инварианта конечного порядка.

Это не совсем точная формулировка теоремы, которая, однако, достаточна для целей нашего курса.

Definition

Функции на хордовых диаграммах, удовлетворяющие 4-членным соотношениям, называются *весовыми системами*.

Лекция 11. Весовые системы: примеры

Example

Будем рассматривать хордовую диаграмму как вложенный граф с одной вершиной. Тогда количество компонент связности ее границы является весовой системой (со значениями в натуральных числах).

Лекция 11. Весовые системы: примеры

Example

Будем рассматривать хордовую диаграмму как вложенный граф с одной вершиной. Тогда количество компонент связности ее границы является весовой системой (со значениями в натуральных числах).
Действительно, количество компонент связности границы сохраняется при переходе от хордовой диаграммы D к хордовой диаграмме $\widetilde{D}_{ab}$.

Example

Хроматический многочлен $\chi_{g(D)}(c)$ графа пересечений $g(D)$ хордовой диаграммы D является весовой системой (со значениями в кольце многочленов от одной переменной).

Example

Будем рассматривать хордовую диаграмму как вложенный граф с одной вершиной. Тогда количество компонент связности ее границы является весовой системой (со значениями в натуральных числах).
Действительно, количество компонент связности границы сохраняется при переходе от хордовой диаграммы D к хордовой диаграмме $\widetilde{D}_{ab}$.

Example

Хроматический многочлен $\chi_{g(D)}(c)$ графа пересечений $g(D)$ хордовой диаграммы D является весовой системой (со значениями в кольце многочленов от одной переменной).
Действительно, для графа пересечений имеем $g(D'_{ab}) = g(D)'_{ab}$ и $g(\widetilde{D}'_{ab}) = (g(\widetilde{D})_{ab})'_{ab}$.
Согласно соотношению удаления-стягивания для хроматического многочлена, имеем $\chi_{g(D)}(c) - \chi_{g(D)'_{ab}}(c) = \chi_{g(D)''_{ab}}(c)$ и $\chi_{g(\widetilde{D}_{ab})}(c) - \chi_{(g(\widetilde{D}_{ab}))'_{ab}}(c) = \chi_{g(\widetilde{D}_{ab})''_{ab}}(c)$. Для доказательство утверждения достаточно заметить, что графы $g(D)''_{ab}$ и $g(\widetilde{D}_{ab})''_{ab}$) естественно изоморфны, а значит, их хроматические многочлены совпадают.

Лекция 11. 4-членные соотношения для графов

Хроматический многочлен графов пересечений удовлетворяет 4-членному соотношению для хордовых диаграмм. Однако другие инварианты графов, удовлетворяющие соотношению удаления-стягивания, не обладают этим свойством. Значит, нужно искать 4-членное соотношение для графов, которое на графах пересечений хордовых диаграмм выглядит так же, как 4-членное соотношение Васильева.

Лекция 11. 4-членные соотношения для графов

Хроматический многочлен графов пересечений удовлетворяет 4-членному соотношению для хордовых диаграмм. Однако другие инварианты графов, удовлетворяющие соотношению удаления-стягивания, не обладают этим свойством. Значит, нужно искать 4-членное соотношение для графов, которое на графах пересечений хордовых диаграмм выглядит так же, как 4-членное соотношение Васильева.

Definition

Инвариант f графов называется 4-*инвариантом*, если для любого графа G и любой пары вершин (a, b) в нем, соединенных ребром, он удовлетворяет 4-членному соотношению

$$f(G) - f(G'_{ab}) = f(\widetilde{G}_{ab}) - f(\widetilde{G}'_{ab}),$$

где через $\widetilde{G}_{ab}$ обозначен граф, полученный из G заменой примыкания к a всех вершин, соседних с b, на противоположное.

Лекция 11. 4-членные соотношения для графов

Хроматический многочлен графов пересечений удовлетворяет 4-членному соотношению для хордовых диаграмм. Однако другие инварианты графов, удовлетворяющие соотношению удаления-стягивания, не обладают этим свойством. Значит, нужно искать 4-членное соотношение для графов, которое на графах пересечений хордовых диаграмм выглядит так же, как 4-членное соотношение Васильева.

Definition

Инвариант f графов называется 4-*инвариантом*, если для любого графа G и любой пары вершин (a, b) в нем, соединенных ребром, он удовлетворяет 4-членному соотношению

$$f(G) - f(G'_{ab}) = f(\widetilde{G}_{ab}) - f(\widetilde{G}'_{ab}),$$

где через $\widetilde{G}_{ab}$ обозначен граф, полученный из G заменой примыкания к a всех вершин, соседних с b, на противоположное.

Theorem

Для любого 4-инварианта f графов композиция $f \circ g$ является весовой системой.

Лекция 11. 4-членные соотношения для графов

Хроматический многочлен графов пересечений удовлетворяет 4-членному соотношению для хордовых диаграмм. Однако другие инварианты графов, удовлетворяющие соотношению удаления-стягивания, не обладают этим свойством. Значит, нужно искать 4-членное соотношение для графов, которое на графах пересечений хордовых диаграмм выглядит так же, как 4-членное соотношение Васильева.

Definition

Инвариант f графов называется 4-*инвариантом*, если для любого графа G и любой пары вершин (a,b) в нем, соединенных ребром, он удовлетворяет 4-членному соотношению

$$f(G) - f(G'_{ab}) = f(\widetilde{G}_{ab}) - f(\widetilde{G}'_{ab}),$$

где через $\widetilde{G}_{ab}$ обозначен граф, полученный из G заменой примыкания к a всех вершин, соседних с b, на противоположное.

Theorem

Для любого 4-инварианта f графов композиция $f \circ g$ является весовой системой.

Доказательство. Операция $G \mapsto \widetilde{G}_{ab}$ на графах повторяет происходящее с графом пересечений хордовой диаграммы D при ее замене хордовой диаграммой $\widetilde{D}_{ab}$.

Семинары 11. Задачи

- Вычислите многочлен Конвея трилистника.

Семинары 11. Задачи

- Вычислите многочлен Конвея трилистника.
- Вычислите многочлен Конвея узла-восьмерки. Зависит ли многочлен Конвея от выбора ориентации этого узла?

Семинары 11. Задачи

- Вычислите многочлен Конвея трилистника.
- Вычислите многочлен Конвея узла-восьмерки. Зависит ли многочлен Конвея от выбора ориентации этого узла?
- Докажите, что многочлен Конвея корректно определен.

- Докажите, что многочлен Конвея является инвариантом узлов.

Семинары 11. Задачи

- Докажите, что многочлен Конвея является инвариантом узлов.
- Докажите, что ранг матрицы смежности $A(G)$ графа G, рассматриваемой как матрица над полем из 2 элементов, инвариантен относительно операции $G \mapsto \widetilde{G}_{ab}$ и является, поэтому, 4-инвариантом.

Семинары 11. Задачи

- Проверьте на графах с 4 вершинами, что многочлен переплетений графа является 4-инвариантом.

Семинары 11. Задачи

- Докажите, что число совершенных паросочетаний в графе является 4-инвариантом.

Семинары 11. Задачи

- Докажите, что число совершенных паросочетаний в графе является 4-инвариантом.
- Докажите, что симметризованный хроматический многочлен Стенли графа является 4-инвариантом.

Семинары 11. Задачи

- Докажите, что число совершенных паросочетаний в графе является 4-инвариантом.
- Докажите, что симметризованный хроматический многочлен Стенли графа является 4-инвариантом.
- Определим реберный четырехугольник в графе как набор из 4 ребер $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, образующих 4-угольник. Докажите, что число реберных четырехугольников в графе по модулю 2 является 4-инвариантом.