Семинар 9.

Всюду в задачах C – невырожденная коника над фиксированным полем $\mathbf{k}, \mathrm{char}\mathbf{k} \neq 2$.

Задача 1. 1) Рассмотрим 5-угольник (точнее, 5-сторонник), описанный около коники C. Сформулируйте для него следующий вырожденный случай теоремы Брианшона.
2) Рассмотрим 4-сторонник, описанный около C. Докажите для него вырожденный случай теоремы Брианшона: прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон этого 4-сторонника, и его диагонали пересекаются в одной точке.

Задача 2. На конике C рассмотрим 4 различные точки $A,\ B,\ C,\ D$. Их двойным отношением $(ABCD)$ назовем двойное отношение 4 прямых $OA,\ OB,\ OC,\ OD$, O - произвольная точка коники C. Докажите, что так определенное двойное отношение $(ABCD)$ не зависит от выбора вспомогательной точки O.

Задача 3. Назовем *проективным преобразованием коники* C всякое биектиное отображение $f : C \xrightarrow{\sim} C$, сохраняющее двойные отношения 4 точек на конике. Пусть $f : C \xrightarrow{\sim} C$ - проективное преобразование, $p : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ - стереографическая проекция из некоторого центра $S \in C$. Докажите, что $\widetilde{f} = p \circ f \circ p^{-1} : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ - проективное преобразование прямой $\mathbb{P}^1$.

Задача 4. 1) Пусть S - точка вне коники C. Рассмотрим отображение $f_S : C \to C,\ X \mapsto Y$, где Y - отличная от X точка пересечения прямой SX с коникой C. Очевидно, что f_S - инволюция на конике C. Докажите, что f_S - проективное преобразование коники C.
2) Докажите, что всякая проективная инволюция на C имеет вид f_S для некоторой точки S вне коники C.

Задача 5. Докажите чисто геометрически (т.е. без вычислений) принцип двойственности $\check{\check{C}} = C$.