Инварианты графов, узлов и вложенных графов

С. К. Ландо

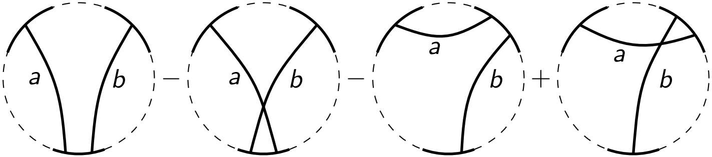
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

В отличие от графов и дельта-матроидов вложенные графы и, в частности, хордовые диаграммы не порождают алгебру Хопфа: непонятно, как их умножать. Ситуация, однако, резко меняется, если профакторизовать пространство хордовых диаграмм по 4-членным соотношениям.

В отличие от графов и дельта-матроидов вложенные графы и, в частности, хордовые диаграммы не порождают алгебру Хопфа: непонятно, как их умножать. Ситуация, однако, резко меняется, если профакторизовать пространство хордовых диаграмм по 4-членным соотношениям.

Обозначим через $\mathcal{C}_n$ результат факторизации векторного пространства, порожденного хордовыми диаграммами с n хордами, по подпространству, порожденному 4-членными элементами



для всех хордовых диаграмм и всех пар хорд a, b с соседними концами в них.

Введем на прямой сумме

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \dots$$

операцию умножения, определив произведение двух хордовых диаграмм как результат их склейки после разрыва каждой из них в произвольной точке.

Введем на прямой сумме

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \dots$$

операцию умножения, определив произведение двух хордовых диаграмм как результат их склейки после разрыва каждой из них в произвольной точке.

Theorem

Операция умножения в $\mathcal{C}$ корректно определена, т.е результат умножения не зависит от выбора точек разрыва в каждом из сомножителей.

Введем на прямой сумме

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \dots$$

операцию умножения, определив произведение двух хордовых диаграмм как результат их склейки после разрыва каждой из них в произвольной точке.

Theorem

Операция умножения в $\mathcal{C}$ корректно определена, т.е результат умножения не зависит от выбора точек разрыва в каждом из сомножителей.

Доказательство.

Лекция 12. Алгебра Хопфа хордовых диаграмм

Коумножение для хордовых диаграмм мы обсуждали раньше. Оно отображает хордовую диаграмму D в сумму тензорных произведений двух хордовых диаграмм, образованных разбиением множества ее хорд на два непересекающихся подмножества,

$$\mu : D \mapsto \sum_{U \sqcup W = V(D)} D(U) \otimes D(W).$$

Коумножение для хордовых диаграмм мы обсуждали раньше. Оно отображает хордовую диаграмму D в сумму тензорных произведений двух хордовых диаграмм, образованных разбиением множества ее хорд на два непересекающихся подмножества,

$$\mu : D \mapsto \sum_{U \sqcup W = V(D)} D(U) \otimes D(W).$$

Theorem

Введенные таким образом умножение и коумножение превращают векторное пространство $\mathcal{C}$ в связную градуированную коммутативную кокоммутативную алгебру Хопфа.

Коумножение для хордовых диаграмм мы обсуждали раньше. Оно отображает хордовую диаграмму D в сумму тензорных произведений двух хордовых диаграмм, образованных разбиением множества ее хорд на два непересекающихся подмножества,

$$\mu : D \mapsto \sum_{U \sqcup W = V(D)} D(U) \otimes D(W).$$

Theorem

Введенные таким образом умножение и коумножение превращают векторное пространство $\mathcal{C}$ в связную градуированную коммутативную кокоммутативную алгебру Хопфа.

Очередное применение теоремы Милнора–Мура дает

Theorem

Алгебра Хопфа $\mathcal{C}$ является алгброй Хопфа многочленов от своих примитивных элементов.

Коумножение для хордовых диаграмм мы обсуждали раньше. Оно отображает хордовую диаграмму D в сумму тензорных произведений двух хордовых диаграмм, образованных разбиением множества ее хорд на два непересекающихся подмножества,

$$\mu : D \mapsto \sum_{U \sqcup W = V(D)} D(U) \otimes D(W).$$

Theorem

Введенные таким образом умножение и коумножение превращают векторное пространство $\mathcal{C}$ в связную градуированную коммутативную кокоммутативную алгебру Хопфа.

Очередное применение теоремы Милнора–Мура дает

Theorem

Алгебра Хопфа $\mathcal{C}$ является алгброй Хопфа многочленов от своих примитивных элементов.

Задача. Вычислить размерности пространств $\mathcal{C}_n$.

Отображение, сопоставляющее хордовой диаграмме ее граф пересечений, продолжается по линейности до градуированного гомоморфизма алгебр Хопфа $g : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$.

Отображение, сопоставляющее хордовой диаграмме ее граф пересечений, продолжается по линейности до градуированного гомоморфизма алгебр Хопфа $g : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$.
Обозначим через $\mathcal{F}_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, факторпространство пространства графов $\mathcal{G}_n$ с n вершинами по подпространству 4-членных элементов, порожденному линейными комбинациями $G - G'_{ab} - \widetilde{G}_{ab} + \widetilde{G}'_{ab}$. Здесь G — граф с n вершинами, a, b — произвольная пара вершин в нем.
Прямая сумма $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \dots$ наделяется естественной структурой градированной коммутативной кокоммутативной алгебры Хопфа. Проекция $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$, переводящая всякий граф в его класс эквивалентности, является гомоморфизмом алгебр Хопфа. Композиция этой проекции с отображением g является гомоморфизмом алгебр Хопфа $\mathcal{C} \to \mathcal{F}$, который мы тоже будем обозначать через g.

Лекция 12. Графы по модулю 4-членных соотношений

Отображение, сопоставляющее хордовой диаграмме ее граф пересечений, продолжается по линейности до градуированного гомоморфизма алгебр Хопфа $g:\mathcal{C}\to\mathcal{G}$.
Обозначим через $\mathcal{F}_n$, $n=0,1,2,\dots$, факторпространство пространства графов $\mathcal{G}_n$ с n вершинами по подпространству 4-членных элементов, порожденному линейными комбинациями $G-G'_{ab}-\widetilde{G}_{ab}+\widetilde{G}'_{ab}$. Здесь G — граф с n вершинами, a,b — произвольная пара вершин в нем.
Прямая сумма $\mathcal{F}=\mathcal{F}_0\oplus\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_2\oplus\dots$ наделяется естественной структурой градированной коммутативной кокоммутативной алгебры Хопфа. Проекция $\mathcal{G}\to\mathcal{F}$, переводящая всякий граф в его класс эквивалентности, является гомоморфизмом алгебр Хопфа. Композиция этой проекции с отображением g является гомоморфизмом алгебр Хопфа $\mathcal{C}\to\mathcal{F}$, который мы тоже будем обозначать через g.
Задача. Найти размерности пространств $\mathcal{F}_n$.
Задача. Верно ли, что отображение $g:\mathcal{C}\to\mathcal{F}$ является эпиморфизмом?

Вложенные графы связаны с инвариантами конечного порядка зацеплений так же, как хордовые диаграммы связаны с инварианты конечного порядка узлов: особому зацеплению сопоставляется вложенный граф, вершины которого — компоненты зацепления, ребра — двойные точки. Всякому инварианту зацеплений порядка не выше n сопоставляется функция на вложенных графах, удовлетворяющая 4-членному соотношению для них. 4-членное соотношение для вложенных графов в точности совпадает с 4-членным для хордовых диаграмм, только хорды могут соединять различные вершины.
В 4-членном соотношении для вложенных графов могут участвовать $1, 2$ или 3 вершины.

Лекция 12. 4-членное соотношение для вложенных графов и алгебры Хопфа дельта-матроидов

4-членное соотношение для вложенных графов не позволяет определить структуру алгебры Хопфа на пространстве вложенных графов. Однако его можно распространить на дельта-матроиды так же, как оно распространяется на вложенные графы. Факторпространство пространства ориентированных дельта-матроидов по подпространству, порожденному 4-членными элементами, наделяется естественной структурой алгебры Хопфа, индуцированной структурой алгебры Хопфа на пространстве дельта-матроидов.

Пусть D — хордовая диаграмма. Разорвем ее окружность в произвольной точке, получим дуговую диаграмму. Эта дуговая диаграмма задает ориентацию на графе пересечений хордовой диаграммы: ребро, соединяющее вершины a и b, ориентируется от a к b, если левый конец дуги a находится левее левого конца дуги b. Сопоставим полученному ориентированному графу $\vec{G}$ его *кососимметрическую матрицу смежности* $A_{\vec{G}}$ — на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит $+1$, если ребро ij ориентировано от i к j, -1, если оно ориентировано от j к i, и 0, если эти вершины не соединены между собой.

Пусть D — хордовая диаграмма. Разорвем ее окружность в произвольной точке, получим дуговую диаграмму. Эта дуговая диаграмма задает ориентацию на графе пересечений хордовой диаграммы: ребро, соединяющее вершины a и b, ориентируется от a к b, если левый конец дуги a находится левее левого конца дуги b. Сопоставим полученному ориентированному графу $\vec{G}$ его *кососимметрическую матрицу смежности* $A_{\vec{G}}$ — на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит $+1$, если ребро ij ориентировано от i к j, -1, если оно ориентировано от j к i, и 0, если эти вершины не соединены между собой.

Theorem

Характеристический многочлен кососимметрической матрицы смежности $A_{\vec{G}}$ *не зависит от выбора точки разрыва окружности.*

Этот общий характеристический многочлен $Q_D(u)$ будем называть *косохарактеристическим многочленом* хордовой диаграммы.

Понятие кососхарактеристического многочлена можно распространить на любые (неориентированные, простые) графы. Пусть G — простой граф. Положим

$$Q_G(u) = \sum_{U \subset V(G)} \nu(G|_U) u^{|V(G)|-|U|},$$

где суммирование идет по всем подмножествам U множества вершин $V(G)$ графа G.

Понятие косохарактеристического многочлена можно распространить на любые (неориентированные, простые) графы. Пусть G — простой граф. Положим

$$Q_G(u) = \sum_{U \subset V(G)} \nu(G|_U) u^{|V(G)|-|U|},$$

где суммирование идет по всем подмножествам U множества вершин $V(G)$ графа G.

Theorem

Косохарактеристический многочлен графов является 4-инвариантом.

Лекция 12. Пример весовой системы для графов и вложенных графов

Понятие косохарактеристического многочлена можно распространить на любые (неориентированные, простые) графы. Пусть G — простой граф. Положим

$$Q_G(u) = \sum_{U \subset V(G)} \nu(G|_U) u^{|V(G)|-|U|},$$

где суммирование идет по всем подмножествам U множества вершин $V(G)$ графа G.

Theorem

Косохарактеристический многочлен графов является 4-инвариантом.

Theorem

Пусть $G = g(D)$ — граф пересечений хордовой диаграммы D. Тогда $Q_G(u) = Q_{D(u)}$.

Лекция 12. Пример весовой системы для графов и вложенных графов

Понятие кососхарактеристического многочлена можно распространить на любые (неориентированные, простые) графы. Пусть G — простой граф. Положим

$$Q_G(u) = \sum_{U \subset V(G)} \nu(G|_U) u^{|V(G)|-|U|},$$

где суммирование идет по всем подмножествам U множества вершин $V(G)$ графа G.

Theorem

Кососхарактеристический многочлен графов является 4-инвариантом.

Theorem

Пусть $G = g(D)$ — граф пересечений хордовой диаграммы D. Тогда $Q_G(u) = Q_{D(u)}$.

Theorem

Значение кососхарактеристического многочлена на проекции графа на подпространство примитивных является константой. Эта константа равна невырожденности графа.

Поскольку невырожденность определена для произвольных вложенных графов и дельта-матроидов, косохарактеристический многочлен также можно определить для дельта-матроидов и вложенных графов.

- Вычислите размерности пространств хордовых диаграмм, профакторизованных по 4-членным соотношениям $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$.

Семинары 12. Задачи

- Вычислите размерности пространств хордовых диаграмм, профакторизованных по 4-членным соотношениям $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$.
- Вычислите размерности пространств графов, профакторизованных по 4-членным соотношениям $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$.

Семинары 12. Задачи

- Вычислите размерности пространств хордовых диаграмм, профакторизованных по 4-членным соотношениям $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$.
- Вычислите размерности пространств графов, профакторизованных по 4-членным соотношениям $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$.
- Докажите, что отображение $g : \mathcal{C}_n \to \mathcal{F}_n$ при $n = 2, 3, 4, 5$ является изоморфизмом.

Семинары 12. Задачи

- Докажите следующую формулу, выражающую производящую функцию

$$m(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\dim\ \mathcal{H}_i t^i$$

для размерностей однородных подпространств $\mathcal{H}_i$ в полиномиальной алгебре Хопфа $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1\oplus\dots$ через размерности $p_i=\dim\ \mathcal{P}(\mathcal{H}_i)$ подпространств примитивных элементов в них. (Другими словами, p_i — количество переменных веса i в полиномиальной алгебре.):

$$m(t)=\frac{1}{(1-t)^{p_1}(1-t^2)^{p_2}(1-t^3)^{p_3}\dots}.$$

Семинары 12. Задачи

- Докажите следующую формулу, выражающую производящую функцию

$$m(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\dim\ \mathcal{H}_i t^i$$

для размерностей однородных подпространств $\mathcal{H}_i$ в полиномиальной алгебре Хопфа $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1\oplus\dots$ через размерности $p_i=\dim\ \mathcal{P}(\mathcal{H}_i)$ подпространств примитивных элементов в них. (Другими словами, p_i — количество переменных веса i в полиномиальной алгебре.):

$$m(t)=\frac{1}{(1-t)^{p_1}(1-t^2)^{p_2}(1-t^3)^{p_3}\dots}.$$

- Воспользовавшись предыдущей формулой, вычислите размерности пространств примитивных элементов в $\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_4,\mathcal{C}_5$.

- Проверьте на графах с 4 вершинами, что косохарактеристический многочлен графа является 4-инвариантом.

Семинары 12. Задачи

- Проверьте на графах с 4 вершинами, что косохарактеристический многочлен графа является 4-инвариантом.
- Вычислите косохарактеристический многочлен а) полного графа на n вершинах K_n; б) полного двудольного графа $K_{m,n}$ с долями размеров m и n.

Семинары 12. Задачи

- Как меняется дельта-матроид вложенного графа при первом и втором движениях Васильева? Дайте определение этих изменений для произвольных бинарных дельта-матроидов и введите понятие 4-членного отношения для них.