Прикладные методы анализа – 2022

1 Интегралы типа Коши и их граничные значения. Формулы Сохоцкого-Племеля

2 Обобщенные функции

3 Гармонические функции и краевые задачи

4 Теория потенциала

5 Цилиндрические и сферические функции

6 Уравнение теплопроводности

7 Некоторые задачи спектральной геометрии

8 Волновое уравнение

9 Уравнение Кортевега-де Фриза и его солитонные решения

В настоящее время известно довольно большое количество нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые в том или ином смысле допускают точное решение (являются интегрируемыми), и которые столь же важны для приложений, как и традиционные линейные уравнения математической физики, хотя и решаются совершенно другими методами. Среди них имеются такие известные уравнения, как уравнение Кортевега-де Фриза, уравнение Кадомцева-Петвиашвили, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение sine-Гордон и другие.

Уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) было предложено в 1895 г. для описания волн на мелкой воде. Распространение возмущений в нелинейной среде с дисперсией в большинстве случаев также происходит согласно уравнению КдФ.

Наводящие соображения таковы.

Волновое уравнение $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ имеет общее решение в виде суперпозиции волн, бегущих направо и налево со скоростью c: $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$. Параметр c имеет смысл скорости звука. Если начальное возмущение было локализовано в ограниченной области, спустя какое-то время мы обнаружим две локализованные разбегающиеся волны, причем одна движется налево, а другая направо. Их можно рассматривать независимо. Будем следить только за волной, бегущей налево; она подчиняется уравнению первого порядка $u_t = cu_x$.

Нелинейные эффекты приводят к тому, что скорость волны начинает зависеть от амплитуды; в первом приближении эту зависимость можно считать линейной: $c(u) = c + \alpha u + \ldots$. Таким образом, учет нелинейности дает поправку $\alpha u u_x$, и уравнение приобретает вид $u_t = cu_x + \alpha u u_x$.

Теперь учтем поправку, связанную с дисперсией. Закон дисперсии – это зависимость частоты волны $\omega = \omega(k)$ от волнового числа k в монохроматической волне $e^{i\omega t + ikx}$. Для решений волнового уравнения эта зависимость линейна: $\omega(k) = ck$. Легко видеть, что в общем случае в системах без диссипации разложение функции $\omega(k)$ при малых k должно идти по нечетным степеням k. В самом деле, закон дисперсии получается из подстановки анзаца $u(x,t) = e^{i\omega t + ikx}$ в некоторое дифференциальное уравнение с вещественными коэффициентами, и результат запишется в виде зависимости $i\omega$ от ik с вещественными коэффициентами. Чтобы частота ω была вещественной при вещественных k (что и есть отсутствие диссипации), необходимо, чтобы разложение шло по нечетным степеням ik. В случае, когда закон дисперсии лишь немного отличается от линейного, мы можем удержать только первый поправочный член: $\omega(k) = ck - \beta k^3$. Чтобы получить такой закон дисперсии, в волновое уравнение надо добавить поправочный член с третьей производной.

При одновременном учете поправок, связанных с нелинейностью и дисперсией, имеем:

$$u_t = cu_x \quad \longrightarrow \quad u_t = cu_x + \alpha u u_x + \beta u_{xxx}.$$

Коэффициенты перед поправочными членами могут быть малы, но если u велико или быстро меняется на малых расстояниях, эти члены становятся существенными. Если перейти в систему отсчета, двигающуюся налево со скоростью звука c, получим уравнение КдФ

$$u_t = \alpha u u_x + \beta u_{xxx}.$$

В предельном случае $\alpha = 0$ (отсутствует нелинейность) уравнение решается преобразованием Фурье. При $\beta = 0$ (отсутствует дисперсия) имеем уравнение Хопфа $u_t = \alpha u u_x$, которое, как и любое уравнение вида $u_t = V(u) u_x$, решается методом характеристик. Общее решение записывается в неявном виде $x + \alpha u t = f(u)$ с произвольной функцией f. Замечательно, что в общем случае $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ уравнение КдФ тоже можно проинтегрировать, хотя и совсем другими методами.

Выбором системы единиц можно избавиться от коэффициентов α, β. Зафиксируем их следующим образом: $\alpha = 3/2$, $\beta = 1/4$, так что уравнение КдФ примет

вид
$$4u_t = 6uu_x + u_{xxx},$$
который будем называть каноническим.

Пример точного решения: солитон. Можно попробовать искать решения уравнения КдФ в виде бегущей волны: $u(x,t) = f(x+vt)$ с $v > 0$. Подставив этот анзац в уравнение КдФ, получим обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка $4vf' = 6ff' + f'''$, в котором можно снять одну производную:
$$4vf = 3f^2 + f'' + C_1.$$
Умножив это уравнение на f', видим, что его можно проинтегрировать еще один раз:
$$f'^2 = 4vf^2 - 2f^3 - 2C_1 f - C_2,$$
где C_1, C_2 – некоторые константы. Это уравнение первого порядка можно проинтегрировать стандартным способом и получить решение в виде
$$x - x_0 = \int^f \frac{dy}{\sqrt{4vy^2 - 2y^3 - 2C_1 y - C_2}}.$$
В общем случае $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ это эллиптический интеграл. Однако, если искать решения, спадающие вместе со своими производными на бесконечности, надо положить $C_1 = C_2 = 0$, и тогда интеграл берется в элементарных функциях. В результате получаем
$$2\sqrt{v}\,(x - x_0) = \log\left(\frac{2\sqrt{v} - \sqrt{4v - 2f}}{2\sqrt{v} + \sqrt{4v - 2f}}\right),$$
или
$$f(x) = \frac{2v}{\cosh^2(\sqrt{v}\,(x - x_0))}.$$
Следовательно, решение уравнения КдФ имеет вид
$$u(x,t) = \frac{2v}{\cosh^2(\sqrt{v}\,(x - x_0 + vt))},$$
где v – произвольный положительный параметр. Это знаменитое односолитонное решение (солитон). Оно описывает локализованное возмущение, которое движется с постоянной скоростью v, сохраняя свою форму. Отметим, что скорость этого возмущения пропорциональна его амплитуде. С точки зрения исходного волнового уравнения с поправками солитон движется со сверхзвуковой скоростью $c + v$ (поскольку уравнение КдФ написано в системе отсчета, уже движущейся со скоростью звука c).

Подчеркнем, что существование точных решений в виде бегущей волны ни в коей мере не является спецификой уравнения КдФ, а есть общее свойство всех эволюционных уравнений вида $u_t = F[u, u_x, \ldots]$. Уравнение КдФ выделено тем, что у него существуют точные *многосолитонные* решения, которые описывают суперпозицию нескольких солитонов и их взаимодействие.

Коммутационное представление уравнения КдФ. Методы, позволяющие найти точные решения уравнения КдФ основаны на его коммутационном представлении.

Теорема. *Уравнение КдФ* $4u_t = 6uu_x + u_{xxx}$ *эквивалентно операторному соотношению*

$$\partial_t L = [A,\, L],$$

где L, A *– дифференциальные операторы*

$$L = \partial_x^2 + u, \qquad A = \partial_x^3 + \frac{3}{2}\, u\partial_x + \frac{3}{4}\, u_x, \quad \partial_x := \partial/\partial x.$$

Доказательство заключается в прямом вычислении. Это операторное уравнение называется уравнением (или представлением) Лакса (для КдФ), а L – оператором Лакса. Пара операторов L, A, входящих в это коммутационное соотношение называется парой Лакса. Уравнение Лакса можно еще записать в виде $[\partial_t - A,\, L] = 0$. Отметим, что L – эрмитов оператор ($L^\dagger = L$), а A – антиэрмитов ($A^\dagger = -A$).

Отметим, что представление Лакса не единственно. Например, уравнение Лакса для операторов $L = \partial_x^4 + 2u\partial_x^2 + u_x\partial_x$, $A = \partial_x^3 + \frac{3}{2}\, u\partial_x$ приводит к уравнению КдФ в форме $2u_t + 3uu_x + u_{xxx} = 0$.

Представление Лакса означает, что $L(t) = U(t)L(0)U^{-1}(t)$, где U – некоторый оператор (при этом $A = \partial_t U\, U^{-1}$). Отсюда следует важнейший вывод:

спектр оператора L *не зависит от времени,*

т.е. является интегралом движения. Соответственно, не зависят от времени $\det(\lambda – L)$, $\mathrm{tr}\,(\lambda - L)^{-1}$. Разлагая эти величины по степеням λ, в принципе можно построить бесконечный набор интегралов движения. Практически, однако, на этом пути возникают две проблемы: а) требуется уточнить, как понимать операции det и tr для операторов в функциональном пространстве, б) неясно, как выделить из этого семейства локальные интегралы движения, т.е. такие, плотности которых в любой точке зависят только от значения функции u и ее производных по x в этой точке.

Вспомогательные линейные задачи и функция Бейкера-Ахиезера. Уравнение Лакса является условием совместности переопределенной системы линейных дифференциальных уравнений (вспомогательных линейных задач)

$$\begin{cases} L\psi = z^2\psi, \\ \\ \partial_t\psi = A\psi. \end{cases}$$

Совместность означает наличие большого запаса общих решений. При $u = 0$ имеем очевидное общее решение $\psi = e^{zx+z^3t}$. При $u \neq 0$ решение можно искать в виде ряда по обратным степеням z:

$$\psi(x,t;z) = e^{zx+z^3t}\left(1 + \frac{\xi_1}{z} + \frac{\xi_2}{z^2} + \dots\right), \quad z \to \infty.$$

Здесь ξ_i зависят только от x (и от t) и выражаются через u подстановкой ряда для ψ в уравнение $(\partial_x^2+u)\psi = z^2\psi$. Например,

$$2\xi_1' + u = 0, \quad 2\xi_2' + \xi_1'' + \xi_1 u = 0 \quad \text{и т.д.}$$

(при $i \geq 2$ будем иметь рекуррентное соотношение $2\xi_i' + \xi_{i-1}'' + \xi_{i-1}u = 0$). Дифференцируя равенство $L\psi = z^2\psi$ по t, получим

$$\Big(\partial_t L + [L,\, A]\Big)\psi = 0.$$

Поскольку это верно при любом z, оператор в левой части равен 0.

Функция ψ, рассматриваемая как функция "спектрального параметра" z, называется функцией Бейкера-Ахиезера[1]. Точнее, пока ее следовало бы называть формальной функцией Бейкера-Ахиезера, поскольку это еще никакая не функция, а просто формальный ряд. Теория становится содержательной, когда этот ряд является разложением некоторой настоящей функции в окрестности бесконечности. Функция Бейкера-Ахиезера играет фундаментальную роль в теории уравнения КдФ (и других солитонных уравнений) и служит основным инструментом для построения точных решений. А именно, схема интегрирования уравнения КдФ будет заключаться в построении семейства решений для ψ. Они уже будут хорошо определенными функциями от z с указанным выше разложением около ∞. Искомое решение u найдется при этом по формуле $u = -2\partial_x\xi_1$.

Интегралы движения. Функция Бейкера-Ахиезера позволяет также найти бесконечный набор локальных интегралов движения.

Теорема. *Функция*

$$\chi := \partial_x \log\psi - z = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j z^{-j} \tag{9.1}$$

является производящей функцией плотностей интегралов движения, т.е. $\partial_t \int \chi_j dx = 0$ *для всех* $j \geq 1$.

<u>Доказательство</u>. Функция χ удовлетворяет уравнению типа Рикатти

$$\chi^2 + \chi_x + 2z\chi + u = 0,$$

откуда ее коэффициенты разложения можно выразить рекуррентным образом через u, u_x, u_{xx} и т.д., например: $\chi_1 = -\frac{1}{2}u$, $\chi_2 = \frac{1}{4}u_x$. С другой стороны,

$$\partial_t\chi = \partial_x\partial_t \log\psi = \partial_x\left(\frac{\partial_t\psi}{\psi}\right) = \partial_x\left(\frac{A\psi}{\psi}\right).$$

Но функция $A\psi/\psi$ выражается через χ, u и их производные по x (поскольку $\partial_x^3\psi/\psi$ выражается через χ и ее производные). Следовательно, коэффициенты разложения этого выражения по z являются дифференциальными полиномами от u, и наличие

[1] Это название пришло из теории функций на римановых поверхностях, которая существенно используется для построения периодических решений уравнения КдФ и других солитонных уравнений.

в правой части равенства производной приводит к тому, что $\partial_t \int \chi dx = 0$ (для быстроубывающих или периодических решений). ■

Отметим, что нетривиальные интегралы движения порождаются только χ_j с нечетными номерами. Все χ_{2n} являются полными производными. В самом деле, написав уравнения Рикатти для $\chi(\pm z)$ и вычтя их друг из друга, получим

$$(\chi(z)+\chi(-z))(\chi(z)-\chi(-z)) + (\chi(z)-\chi(-z))_x + 2z(\chi(z)+\chi(-z)) = 0,$$

откуда $\chi(z)+\chi(-z) = -\partial_x \log\Big(\chi(z)-\chi(-z)+2z\Big)$ – полная производная.

Задача Коши для уравнения КдФ и обратная задача теории рассеяния. Задача Коши для уравнения КдФ сводится к обратной задаче теории рассеяния для уравнения Шредингера на прямой, которое имеет вид

$$\partial_x^2\psi + u\psi = -k^2\psi.$$

Вещественный потенциал $u = u(x)$ будем считать гладким и обращающимся в нуль при $|x| \to \infty$. В общем случае у оператора $\partial_x^2 + u$ имеется как непрерывный, так и дискретный спектр. Собственные функции дискретного спектра (для которых $k^2 < 0$) квадратично интегрируемы, а непрерывного (для которых $k^2 > 0$) – ненормируемы. В дальнейшем мы для простоты будем предполагать, что дискретный спектр отсутствует; для этого достаточно считать, что $u \leq 0$.

При вещественных $k \neq 0$ множество решений уравнения Шредингера образует двумерное линейное пространство. Фиксируем в нем два базиса: (ψ_1, ψ_2) и (φ_1, φ_2). Первый из них задается условием на $+\infty$:

$$\psi_1 = e^{-ikx} + o(1), \quad x \to +\infty,$$

$$\psi_2 = e^{ikx} + o(1), \quad x \to +\infty.$$

Второй задается условием на $-\infty$:

$$\varphi_1 = e^{-ikx} + o(1), \quad x \to -\infty,$$

$$\varphi_2 = e^{ikx} + o(1), \quad x \to -\infty.$$

Ввиду вещественности потенциала имеем $\psi_2 = \bar{\psi}_1$, $\varphi_2 = \bar{\varphi}_1$. В дальнейшем индекс 1 у функций ψ_1, φ_1 будем опускать. Функции φ-базиса – линейные комбинации функций ψ-базиса с коэффициентами, зависящими только от k:

$$\varphi(x,k) = a(k)\psi(x,k) + b(k)\bar{\psi}(x,k),$$

$$\bar{\varphi}(x,k) = \bar{b}(k)\psi(x,k) + \bar{a}(k)\bar{\psi}(x,k).$$

Как известно, вронскиан $W(f,g) = f\partial_x g - g\partial_x f$ любой пары решений уравнения Шредингера не зависит от x. Очевидно, $W(\psi,\bar{\psi}) = W(\varphi,\bar{\varphi}) = 2ik$, откуда следует, что

$$|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1,$$

т.е. матрица

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ \bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{pmatrix},$$

которая называется матрицей перехода, унимодулярна: $\det T(k) = 1$.

Легко видеть, что величины $t(k) = a^{-1}(k)$ и $r(k) = b(k)a^{-1}(k)$ представляют собой соответственно коэффициенты прохождения и отражения для волны, падающей на потенциал $u(x)$ справа. Действительно, асимптотика собственной функции $a^{-1}(k)\varphi(x,k)$ при $x \to -\infty$ имеет вид

$$\frac{\varphi(x,k)}{a(k)} = \frac{e^{-ikx}}{a(k)} + o(1) \quad \text{(прошедшая волна)},$$

а при $x \to +\infty$ –

$$\frac{\varphi(x,k)}{a(k)} = e^{-ikx} + \frac{b(k)}{a(k)}\, e^{ikx} + o(1) \quad \text{(падающая и отраженные волны)}.$$

Из $|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1$ следует, что рассеяние унитарно, т.е.

$$|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1.$$

Обратная задача теории рассеяния заключается в восстановлении потенциала по данным рассеяния (коэффициентам отражения и прохождения).

Теперь предположим, что потенциал зависит от дополнительного параметра t: $u = u(x,t)$. Данные рассеяния при этом тоже начнут зависеть от t, и мы имеем

$$\varphi(x,k) = a(k,t)e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx} + o(1), \quad x \to +\infty.$$

Производную по t будем обозначать точкой над буквой. Продифференцируем уравнение Шредингера $L\psi = -k^2\psi$ (где L – оператор Лакса, он же оператор Шредингера) по t:

$$\dot{L}\psi + L\dot{\psi} = -k^2\dot{\psi}.$$

Воспользовавшись представлением Лакса $\dot{L} = [A, L]$, будем иметь:

$$(L + k^2)(\dot{\psi} - A\psi) = 0.$$

В качестве ψ возьмем решение $\varphi(x,k)$, его асимптотика при $x \to -\infty$ не зависит от t и имеет вид e^{-ikx}, значит

$$\dot{\varphi} - A\phi = -ik^3 e^{-ikx} + o(1), \quad x \to -\infty,$$

откуда

$$\dot{\varphi}(x,t) = A\varphi(x,t) - ik^3\varphi(x,t).$$

Приравнивая асимптотики левой и правой частей этого равенства при $x \to +\infty$, получим:

$$\dot{a}e^{-ikx} + \dot{b}e^{ikx} = (\partial_x^3 - ik^3)(ae^{-ikx} + be^{ikx}) = -2ik^3 be^{ikx}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\begin{cases} \dot{a}(k,t) = 0, \\ \\ \dot{b}(k,t) = -2ik^3 b(k,t). \end{cases}$$

Это означает, что если потенциал зависит от t в силу уравнения КдФ, коэффициент прохождения остается постоянным, а коэффициент отражения имеет простую экспоненциальную зависимость от t:

$$r(k,t) = r(k,0)e^{-2ik^3t}.$$

Этот факт дает общую схему решения задачи Коши для уравнения КдФ: по потенциалу $u(x,0)$ найти данные рассеяния при $t=0$, продолжить их во времени на $t>0$ (эта зависимость элементарна) и по этим новым данным найти $u(x,t)$, решив обратную задачу рассеяния.

Подробнее об обратной задаче теории рассеяния в связи с решением уравнения КдФ можно почитать в книге [13].

Идея построения решений уравнения КдФ с помощью ψ-функции. Мы не будем решать задачу Коши, а вместо этого построим большой запас быстроубывающих на бесконечности точных решений, которые называются многосолитонными решениями.

Сформулируем простую, но важную лемму технического характера, на которой будет основана процедура построения точных решений.

Лемма. *Для формального ряда ψ вида*

$$\psi = e^{zx+z^3t}\Big(1 + \frac{\xi_1}{z} + \frac{\xi_2}{z^2} + \dots\Big)$$

справедливы равенства

$$(\partial_x^2 - z^2 + u)\psi = O(z^{-1})e^{zx+z^3t},$$

$$(\partial_t + \tfrac{1}{2}\,\partial_x^3 - \tfrac{3}{2}\,z^2\partial_x + \tfrac{3}{4}\,u_x)\psi = O(z^{-1})e^{zx+z^3t},$$

где функция $u = u(x,t)$ может быть найдена из условия обращения в нуль коэффициентов при неотрицательных степенях z: $u = -2\xi_{1,x}$.

Доказательство заключается в прямой проверке. Смысл и польза этого утверждения в том, что оно позволяет строить точные решения уравнения КдФ с помощью методов линейной алгебры. Предположим, что линейное пространство ψ-функций с разложением в ряд при $z\to\infty$ указанного вида, определенное наложением каких-либо требований на аналитические свойства этих функций как функций комплексной переменной z, *одномерно* (т.е. с точностью до умножения на константу имеется только одна такая функция), а операторы, стоящие в левых частях формальных равенств, не выводят за пределы этого пространства. Тогда из вида правых частей сразу следует, что они равны нулю тождественно, а не только с точностью до членов типа $O(z^{-1})e^{zx+z^3t}$. Это в свою очередь означает, что функция ψ при всех z является общим решением пары рассмотренных выше вспомогательных линейных задач, из совместности которых вытекает, что функция $u = -2\partial\xi_1$ удовлетворяет уравнению КдФ.

Односолитонное решение. Начнем с простейшего примера. На расширенной комплексной плоскости переменной z рассмотрим пространство функций $\psi = \psi(z)$, зависящих от x, t как от параметров, мероморфных везде кроме бесконечности и таких, что:

а) функция ψe^{-zx-z^3t} регулярна в окрестности точки $z = \infty$;

б) ψ имеет единственный простой полюс в точке $z = 0$, а в остальном голоморфна везде кроме ∞;

в) в некоторой фиксированной точке $p \in \mathbb{C}$ выполняется соотношение

$$\psi(x, t; p) = \psi(x, t; -p).$$

Переменные x, t и точка p рассматриваются здесь как фиксированные параметры. Очевидно, такие функции образуют линейное пространство над полем комплексных чисел. Легко видеть, что если параметры находятся в общем положении, размерность этого пространства равна 1, т. е. с точностью до умножения на константу имеется только одна такая функция. В самом деле, ψ, очевидно, имеет вид

$$\psi = e^{zx+z^3t}\Big(b_0 + \frac{b_1}{z}\Big)$$

с некоторыми b_0, b_1, но условие в) фиксирует отношение b_1/b_0, и в результате неопределенным остается только общий множитель.

Далее, нетрудно убедиться, что операторы в левых частях равенств в лемме переводят определенное выше пространство функций в себя. Для этого надо проверить, что при любом выборе функции u

$$(\partial_x^2 - z^2 + u)\psi = O(1)e^{zx+z^3t},$$

$$(\partial_t + \tfrac{1}{2}\,\partial_x^3 - \tfrac{3}{2}\,z^2\partial_x + \tfrac{3}{4}\,u_x)\psi = O(1)e^{zx+z^3t},$$

и что значения левых частей при $z = p$ и $z = -p$ совпадают. Первое проверяется прямым вычислением, а второе очевидно из того, что z в левые части входит в квадрате. Тем самым в правых частях этих равенств стоят функции из того же линейного пространства; обозначим их ψ_1 и ψ_2. Согласно лемме, при $u = -2\xi_{1,x}$ правые части на самом деле имеют вид $O(1/z)e^{zx+z^3t}$. Это значит, что функции $\psi_1 e^{-zx-z^3t}$ и $\psi_2 e^{-zx-z^3t}$ обращаются в ноль на бесконечности. В силу единственности имеем тогда $\psi_1 = \psi_2 \equiv 0$, т. е.

$$(\partial_x^2 + u - z^2)\psi = 0,$$

$$(\partial_t + \tfrac{1}{2}\,\partial_x^3 - \tfrac{3}{2}\,z^2\partial_x + \tfrac{3}{4}\,u_x)\psi = 0.$$

Выразив $z^2\psi$ из первого равенства и подставив во второе, придем к паре линейных задач

$$L\psi = z^2\psi, \qquad \partial_t\psi = A\psi$$

вместе с явно построенным семейством общих решений. Их совместность гарантирует, что $u = -2\xi_{1,x}$ является решением уравнения КдФ.

Осталось найти решение в явном виде. Для функции

$$\psi = e^{zx+z^3t}\Big(1 + \frac{\xi_1}{z}\Big)$$

условие $\psi(p) = \psi(-p)$ эквивалентно линейному уравнению

$$e^{2px+2p^3t}(p+\xi_1) = p - \xi_1$$

на ξ_1, откуда $\xi_1 = -p\,\tanh(px+p^3t)$ и, следовательно,

$$u(x,t) = \frac{2p^2}{\cosh^2(px+p^3t)}.$$

Обратим внимание на то, что $\xi_1 = -\partial_x \log\cosh(px+p^3t)$, и тем самым эту формулу можно записать в виде

$$u(x,t) = 2\partial_x^2 \log\cosh(px+p^3t).$$

Мы получили уже известное нам односолитонное решение.

Отметим, что вместо функций с полюсом в 0 можно рассматривать функции с полюсом в произвольной точке $a \in \mathbb{C}$ и с более общим условием $\psi(p) = \alpha\psi(-p)$, где α – произвольная ненулевая константа.

Многосолитонные решения. Рассмотрим линейное пространство функций $\psi = \psi(z)$ мероморфных везде кроме бесконечности и таких, что:

а) функция ψe^{-zx-z^3t} регулярна в окрестности точки $z=\infty$;

б) ψ имеет не более N полюсов (с учетом кратностей) в заданных конечных точках комплексной плоскости, а в остальном голоморфна везде кроме ∞;

в) в N различных точках $p_j \in \mathbb{C}$ выполняются соотношения $\psi(p_j) = \alpha_j\psi(-p_j)$, $j = 1,\ldots,N$.

Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда все полюса сосредоточены в точке $z=0$, т. е. там имеется полюс кратности не более N, и других полюсов нет. Тогда ψ представима в виде

$$\psi = e^{zx+z^3t}\Big(b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots + \frac{b_N}{z^N}\Big)$$

Пространство таких функций, очевидно, $(N+1)$-мерно. Аналогично тому, как это было в случае одного полюса, N линейных условий $\psi(p_j) = \alpha_j\psi(-p_j)$ на коэффициенты b_j превращают его в одномерное пространство, а операторы в левых частях равенств в условии леммы переводят это пространство в себя. Поэтому, если нормировать ψ условием, что коэффициент при z^0 равен 1,

$$\psi = e^{zx+z^3t}\Big(1 + \frac{\xi_1}{z} + \frac{\xi_2}{z^2} + \ldots + \frac{\xi_N}{z^N}\Big),$$

то $u = -2\xi_{1,x}$ является решением уравнения КдФ.

Найдем это решение в явном виде. Условия $\psi(p_j) = \alpha_j \psi(-p_j)$ эквивалентны следующей системе линейных уравнений на ξ_j:

$$\sum_{j=1}^{N} M_{ij}\, \xi_j = -M_{i0},$$

где M_{ij} имеет вид $M_{ij} = p_i^{-j} e^{p_i x + p_i^3 t} - \alpha_i (-p_i)^{-j} e^{-p_i x - p_i^3 t}$. Правило Крамера дает

$$\xi_1 = -\,\frac{\det M_{ij}^{(0)}}{\det M_{ij}}\,, \qquad i, j = 1, \ldots, N,$$

где матрица $M_{ij}^{(0)}$ отличается от M_{ij} заменой первого столбца M_{i1} на M_{i0} (i – номер строки). Поскольку $\partial_x M_{ij} = M_{i,j-1}$, имеем $\det M_{ij}^{(0)} = \partial_x \det M_{ij}$, и $\xi_1 = -\partial_x \log\det M_{ij}$, так что $u = 2\partial_x^2 \log\det M_{ij}$. Итак, мы получили семейство решений

$$u = 2\partial_x^2 \log \tau(x,t),$$

где

$$\tau(x,t) = \det_{1\le i,j\le N}\left(p_i^{-j} e^{p_i x + p_i^3 t} - \alpha_i (-p_i)^{-j} e^{-p_i x - p_i^3 t}\right).$$

Построенное решение называется N-солитонным, а p_i называются импульсами солитонов. Это решение обладает замечательными свойствами, которые мы здесь объясним на примере двух солитонов ($N = 2$). Можно показать, что формула для u устроена так, что при больших отрицательных значениях t она описывает два солитона со скоростями $v_1 = p_1^2$, $v_2 = p_2^2$, находящимися на большом расстоянии друг от друга и имеющими форму, близкую к форме точного односолитонного решения для солитонов с импульсами p_1 и p_2. Пусть $p_1 < p_2$, тогда второй солитон (с большей амплитудой) догоняет первый. Когда он его догонит, профиль решения $u(x,t)$ становится довольно сложным, что можно интерпретировать как взаимодействие солитонов. Замечательно, что в результате этого процесса взаимодействия при больших положительных значениях t опять возникают те же два солитона с импульсами p_1 и p_2, но теперь первый из них оказывается позади второго. Эффект взаимодействия проявляется в том, что если до столкновения (при больших отрицательных значениях t) солитон двигался приблизительно по линейному закону $x(t) = vt + x_0$, то после столкновения (при больших положительных значениях t) этот закон принимает вид $x(t) = vt + x_0'$ с $x_0' \neq x_0$.

Функция τ называется τ-функцией. Она играет фундаментальную роль в теории как уравнения КдФ, так и всех остальных интегрируемых уравнений. Оказывается, любое точное решение уравнения КдФ (не только N-солитонное) можно представить как удвоенную вторую логарифмическую производную от детерминанта некоторой матрицы или оператора (в общем случае бесконечномерного). Этот детерминант и является τ-функцией. Поскольку решение выражается через вторую логарифмическую производную от τ, τ-функции, отличающиеся только фактором вида Ce^{ax} с некоторыми константами C и a, считаются эквивалентными.

Укажем еще две полезные формы записи солитонной τ-функции. Первая из них тоже представляет собой детерминант матрицы $N \times N$:

$$\tau = \det_{1\le i,j\le N}\left(\delta_{ij} + \frac{2\beta_i p_i}{p_i + p_j}\, e^{2p_i x + 2p_i^3 t}\right)$$

Здесь β_i – некоторые параметры, аналогичные α_i. Доказательство эквивалентности этого детерминантного представления и найденного выше – хорошее упражнение.

Раскрыв детерминант, получим следующую формулу:

$$\tau = \sum_{\{\epsilon_1,\dots,\epsilon_N\}\in\mathbb{Z}_2^N} \prod_{i<j}^{N} \left(\frac{p_i - p_j}{p_i + p_j}\right)^{2\epsilon_i\epsilon_j} \prod_{k=1}^{N} \left(\beta_k e^{2p_k x + 2p_k^3 t}\right)^{\epsilon_k}.$$

Здесь суммирование ведется по всем наборам из N чисел ϵ_i, принимающих значения $0, 1$, так что сумма содержит 2^N членов. Например, при $N = 2$ имеем:

$$\tau = 1 + \beta_1 e^{2p_1 x + 2p_1^3} + \beta_2 e^{2p_2 x + 2p_2^3} + \beta_1\beta_2 \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^2 e^{2(p_1+p_2)x + 2(p_1^3+p_2^3)t}.$$

Это τ-функция двухсолитонного решения.

Список литературы

[1] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1973.

[2] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва, 1977.

[3] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Москва, 1959.

[4] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1985.

[5] В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Москва, 2000.

[6] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1977.

[7] P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Conformal maps and integrable hierarchies*, Communications in Mathematical Physics, **213** (2000) 523–538.

[8] В.И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, Фазис, Москва, 1999.

[9] А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров, *Специальные функции математической физики*, Наука, Москва, 1984.

[10] Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис, *Элементы математической физики*, Наука, Москва, 1973.

[11] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, American Mathematical Monthly, Volume 73 (1966), Issue 4, Part 2: Papers in Analysis, 1–23.

[12] H.P. McKean, Jr., I.M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geom. **1** (1967) 43–69.

[13] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, Москва, 1980.

[14] М.В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, Москва, 1987.