Прикладные методы анализа – 2022

1 Интегралы типа Коши и их граничные значения. Формулы Сохоцкого-Племеля

2 Обобщенные функции

3 Гармонические функции и краевые задачи

4 Теория потенциала

5 Цилиндрические и сферические функции

6 Уравнение теплопроводности

7 Некоторые задачи спектральной геометрии

8 Волновое уравнение

9 Уравнение Кортевега-де Фриза и его солитонные решения

10 Асимптотические методы

В заключение рассмотрим несколько простейших примеров асимптотического вычисления некоторых часто встречающихся интегралов и сумм. Более подробно с асимптотическими методами можно познакомиться по книге [14].

Метод Лапласа. Рассмотрим интеграл вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx$$

и найдем главный член его асимптотического разложения по параметру λ при $\lambda \to +\infty$. Предположим, что функция $S(x)$ имеет единственный максимум на отрезке $[a, b]$ в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$, при этом $S'(x_0) = 0$, $S''(x_0) < 0$. Пусть также $f(x_0) \neq 0$. При $\lambda \gg 1$ подынтегральная функция имеет резкий максимум в точке x_0 и интеграл приближенно (с точностью до экспоненциально малых членов) равен интегралу по малой окрестности точки x_0:

$$F(\lambda) \cong \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) e^{\lambda S(x)} dx.$$

На отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ заменим приближенно

$$f(x) = f(x_0) + O(x - x_0),$$

$$S(x) = S(x_0) - \tfrac{1}{2}\, |S''(x_0)| (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3),$$

и тогда

$$F(\lambda) = f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{1}{2}\,\lambda |S''(x_0)| (x-x_0)^2} (1 + O(x - x_0)) dx.$$

Сделав замену переменной интегрирования $t = \sqrt{\lambda |S''(x_0)|}\,(x - x_0)$, получим:

$$F(\lambda) = \frac{f(x_0) e^{\lambda S(x_0)}}{\sqrt{\lambda |S''(x_0)|}} \int\limits_{-\delta\sqrt{\lambda |S''(x_0)|}}^{\delta\sqrt{\lambda |S''(x_0)|}} e^{-t^2/2} dt + O\Big(\lambda^{-3/2} e^{\lambda S(x_0)}\Big).$$

При $\lambda \to +\infty$ пределы интегрирования стремятся к $\pm\infty$, и мы имеем стандартный гауссов интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Окончательный результат таков:

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}}\, f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \Big(1 + O(\lambda^{-1})\Big).$$

Если точка x_0 совпадает с одним из концов отрезка $[a, b]$ (скажем, $x_0 = a$), те же самые рассуждения приводят к формуле

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(a)|}}\, f(a) e^{\lambda S(a)} \Big(1 + O(\lambda^{-1})\Big),$$

которая отличается от предыдущего результата только множителем $\frac{1}{2}$.

Наконец, рассмотрим случай, когда $S'(x) \neq 0$ на всем отрезке $[a, b]$. Пусть для определенности $S'(x) < 0$ при $x \in [a, b]$, так что максимум функции $S(x)$ достигается в точке a. В этом случае лидирующий член асимптотики легко находится интегрированием по частям. Обозначим через $G(\lambda, x)$ первообразную функции $e^{\lambda S(x)}$; легко убедиться, что

$$G(\lambda, x) = \frac{e^{\lambda S(x)}}{\lambda S'(x)} + O\Big(\lambda^{-2} e^{\lambda S(x)}\Big), \qquad \lambda \to \infty.$$

Тогда, интегрируя по частям, получаем:

$$F(\lambda) = f(x) G(\lambda, x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) G(\lambda, x) dx$$

$$= -\left(\frac{f(a)}{\lambda S'(a)} + O(\lambda^{-2})\right) e^{\lambda S(a)}.$$

Мы видим, что в этом случае лидирующий член ведет себя как $O(\lambda^{-1} e^{\lambda S})$, а не $O(\lambda^{-1/2} e^{\lambda S})$, как в случае, когда максимум достигается во внутренней точке.

Пример: гамма-функция. Найдем методом Лапласа асимптотику гамма-функции $\Gamma(x)$ при $x \to +\infty$, пользуясь интегральным представлением

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = x^{x+1} \int_0^\infty e^{x(\log t - t)} dt.$$

В этом случае функция $S(t) = \log t - t$ имеет точку максимума $t_0 = 1$, причем $S''(t_0) = -1$. Полученная выше асимптотическая формула дает

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x} \Big(1 + O(x^{-1})\Big), \quad x \to +\infty.$$

Эта формула называется формулой Стирлинга.

Метод стационарной фазы. Рассмотрим интеграл вида

$$\Phi(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx$$

и найдем главный член его асимптотического разложения по λ при $\lambda \to +\infty$. Предположим, что функция $S(x)$ имеет единственный экстремум на отрезке $[a, b]$ в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$, при этом $S'(x_0) = 0$, $S''(x_0) \neq 0$. Пусть также $f(x_0) \neq 0$. При $\lambda \gg 1$ подынтегральная функция быстро осциллирует, соседние полуволны почти полностью гасят друг друга, и интеграл набирается в малой окрестности $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ точки x_0, где осцилляции замедляются. В этой окрестности мы можем приближенно заменить

$$f(x) = f(x_0) + O(x - x_0),$$

$$S(x) = S(x_0) + \tfrac{1}{2} S''(x_0)(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3),$$

и тогда

$$\Phi(\lambda) = f(x_0) e^{i\lambda S(x_0)} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{\frac{i}{2} \lambda S''(x_0)(x - x_0)^2} (1 + O(x - x_0)) dx.$$

Сделав замену переменной интегрирования $t = \sqrt{\lambda |S''(x_0)|}\,(x - x_0)$, получим:

$$\Phi(\lambda) = \frac{f(x_0)e^{i\lambda S(x_0)}}{\sqrt{\lambda |S''(x_0)|}} \int\limits_{-\delta\sqrt{\lambda|S''(x_0)|}}^{\delta\sqrt{\lambda|S''(x_0)|}} e^{i\,\mathrm{sign}(S''(x_0))t^2/2} dt + O(\lambda^{-3/2}).$$

При $\lambda \to +\infty$ пределы интегрирования стремятся к $\pm\infty$, и мы имеем интеграл Френеля

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm it^2/2} dt = \sqrt{2\pi}\, e^{\pm \frac{i\pi}{4}}.$$

Окончательный результат таков:

$$\Phi(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}}\, f(x_0) e^{i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi}{4}\,\mathrm{sign} S''(x_0)} \Big(1 + O(\lambda^{-1})\Big).$$

Если на отрезке $[a, b]$ имеется несколько точек экстремума x_j таких, что $S(x_j) = 0$, $S''(x_j) \neq 0$, лидирующая асимптотика находится как сумма по всем этим точкам:

$$\Phi(\lambda) = \sum_j \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_j)|}}\, f(x_j) e^{i\lambda S(x_j) + \frac{i\pi}{4}\,\mathrm{sign} S''(x_j)} \Big(1 + O(\lambda^{-1})\Big).$$

Если же $S'(x) \neq 0$ на всем отрезке $[a, b]$, интегрированием по частям получаем формулу

$$\Phi(\lambda) = \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)}\, e^{i\lambda S(x)} \Big|_a^b + O(\lambda^{-2}).$$

Пример: функции Бесселя. Найдем методом стационарной фазы асимптотику функции Бесселя $J_n(x)$ для целых n при $x \to +\infty$, пользуясь интегральным представлением

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\varphi} e^{ix\sin\varphi} d\varphi.$$

В этом случае $f(\varphi) = e^{-in\varphi}$, $S(\varphi) = \sin\varphi$, и имеются две точки экстремума $\varphi_\pm = \pm\pi/2$, в которых $S(\varphi_\pm) = \pm 1$, $S''(\varphi_\pm) = \mp 1$. Полученная выше асимптотическая формула дает

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^{-\frac{in\pi}{2}}\, e^{ix - \frac{i\pi}{4}} + \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^{\frac{in\pi}{2}}\, e^{-ix + \frac{i\pi}{4}} \right] + O(x^{-3/2})$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \cos\Big(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) + O(x^{-3/2}).$$

Формула Эйлера-Маклорена. Рассмотрим сумму

$$F(N) = \sum_{k=1}^{N} f(k)$$

и найдем для нее асимптотическое разложение при $N \to \infty$. Наши рассуждения будут нестрогими, но интуитивно понятными. Будем считать, что функция $f(x)$ определена при всех вещественных положительных значениях x, а не только при целых. Мы имеем разностное уравнение:

$$F(x) - F(x-1) = f(x).$$

Пользуясь тем, что

$$F(x-1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \, \partial_x^m F(x) = e^{-\partial_x} F(x),$$

его можно записать в виде

$$\Big(1 - e^{-\partial_x}\Big) F(x) = f(x),$$

откуда

$$F(x) = \frac{1}{1 - e^{-\partial_x}} \, f(x) = \partial_x^{-1} \, \frac{\partial_x}{1 - e^{-\partial_x}} \, f(x).$$

Воспользовавшись определением чисел Бернулли

$$\frac{z}{1 - e^{-z}} = 1 + \frac{z}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{(2k)!} \, z^{2k}$$

(отметим, что $B_1 = \frac{1}{6}$), запишем эту формулу в виде

$$F'(x) = f(x) + \frac{1}{2} \, f'(x) + \frac{1}{12} \, f''(x) - \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{(2k)!} \, f^{(2k)}(x).$$

Интегрируя, получаем:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt + C + \frac{1}{2} \, f(x) + \frac{1}{12} \, f'(x) - \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{(2k)!} \, f^{(2k-1)}(x),$$

где C – некоторая константа, которую нельзя найти этим методом.

Приведем два примера. Если $f(x) = \log x$, имеем $F(N) = \log N!$. Формула Эйлера-Маклорена дает

$$\log N! = \int_0^N \log t \, dt + C + \frac{1}{2} \, \log N + \frac{1}{12N} + O(N^{-2})$$

$$= N \log N - N + \frac{1}{2} \, \log N + C + \frac{1}{12N} + O(N^{-2}).$$

Из найденной выше асимптотики гамма-функции находим, что константа C в этом случае равна $C = \log \sqrt{2\pi}$, так что

$$\log \Gamma(x) = x \log x - x - \frac{1}{2} \, \log x + \log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{12x} + O(x^{-2}), \quad x \to +\infty.$$

Второй пример – асимптотика функции Барнса $G(x)$, которая определяется функциональным соотношением

$$G(x+1) = \Gamma(x) G(x).$$

При целых положительных $x = N$ имеем

$$G(N+1) = \prod_{j=0}^{N-1} j! = \prod_{j=1}^{N} \Gamma(j),$$

так что в этом случае можно воспользоваться формулой Эйлера-Маклорена при $f(x) = \log\Gamma(x)$. Мы получим:

$$\log G(N+1) = \int_1^N \Big(x\log x - x - \frac{1}{2}\,\log x + \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12x}\Big)dx$$

$$+\frac{1}{2}\Big(N\log N - N - \frac{1}{2}\,\log N\Big) + \frac{1}{12}\,\log N + O(1)$$

$$= \frac{1}{2}\,N^2\log N - \frac{3}{4}\,N^2 + N\log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{12}\,\log N + O(1).$$

Список литературы

[1] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1973.

[2] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва, 1977.

[3] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Москва, 1959.

[4] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1985.

[5] В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Москва, 2000.

[6] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1977.

[7] P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Conformal maps and integrable hierarchies*, Communications in Mathematical Physics, **213** (2000) 523–538.

[8] В.И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, Фазис, Москва, 1999.

[9] А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров, *Специальные функции математической физики*, Наука, Москва, 1984.

[10] Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис, *Элементы математической физики*, Наука, Москва, 1973.

[11] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, American Mathematical Monthly, Volume 73 (1966), Issue 4, Part 2: Papers in Analysis, 1–23.

[12] H.P. McKean, Jr., I.M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geom. **1** (1967) 43–69.

[13] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, Москва, 1980.

[14] М.В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, Москва, 1987.