Мера и интеграл: вопросы экзамена

1. Алгебры и σ-алгебры. Борелевская σ-алгебра. Борелевская σ-алгебра прямой порождается лучами, но не точками.
2. Аддитивность и счетная аддитивность. Пример аддитивной, но не счетно-аддитивной функции на алгебре. Равносильность счетной аддитивности и непрерывности в нуле для аддитивной функции на алгебре.
3. Компактные классы множеств. Компактность класса компактных множеств. Счетная аддитивность аддитивной функции на алгебре, имеющей компактный приближающий класс. Формулировка теоремы о приближении компактами для борелевских мер.
4. Внешняя мера, порожденная счетно-аддитивной мерой на алгебре; ее монотонность и счетная полуаддитивность. Определение измеримости по Лебегу.
5. Формулировка теоремы о внешней мере на классе измеримых множеств. Пример Витали неизмеримого множества.
6. Построение классической меры Лебега на отрезке и кубе: определение и существование. Мера Лебега на всем пространстве, ее инвариантность при сдвигах и поворотах.
7. Измеримые функции и их основные свойства (композиции с борелевскими, сложение, умножение, пределы). Измеримые функции как пределы простых функций.
8. Теорема Егорова. Теорема Лузина (формулировка).
9. Определение интеграла Лебега для простых функций и общее определение. Неравенство Чебышёва.
10. Линейность интеграла Лебега (формулировка). Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
11. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости.
12. Теорема Беппо Леви о монотонной сходимости. Теорема Фату. Критерий интегрируемости по Лебегу в терминах множеств $\{|f| \geq n\}$.
13. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.
14. Неравенство Йенсена.
15. Неравенства Гёльдера, Коши – Буняковского и Минковского.
16. Определение пространств L^p. Полнота L^1.
17. Произведение мер. Теорема о монотонных классах (формулировка) и ее применение к обоснованию определения произведения мер.
18. Теорема Фубини. Свертка интегрируемых функций.
19. Образ меры при отображении. Общая формула замены переменных. Формула замены переменных при диффеоморфизмах (формулировка).
20. Определение абсолютно непрерывной функции. Описание абсолютно непрерывных функций через неопределенные интегралы интегрируемых функций (доказательство абсолютной непрерывности интеграла по верхнему пределу). Теорема о дифференцируемости почти всюду и формула Ньютона – Лейбница для абсолютно непрерывных функций (формулировки). Вывод формулы интегрирования по частям для абсолютно непрерывных функций.