Инварианты графов, узлов и вложенных графов

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Наряду с инвариантами графов, удовлетворяющими 4-членным соотношениям, другим основным источником весовых систем служат алгебры Ли.

Наряду с инвариантами графов, удовлетворяющими 4-членным соотношениям, другим основным источником весовых систем служат алгебры Ли.

Definition

Алгеброй Ли называется векторное пространство, на котором задана билинейная операция $(x, y) \mapsto [x, y]$, для которой выполняются

- *кососимметричность*, $[x, y] = -[y, x]$ для любых x и y;
- *тождество Якоби* $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ для любых x, y, z.

Лекция 13. Примеры алгебр Ли

Одним из сновных источников алгебр Ли служат пространства матриц. В качестве операции $[\cdot,\cdot]$ (*скобки Ли*) в них выступает коммутатор матриц.

Лекция 13. Примеры алгебр Ли

Одним из сновных источников алгебр Ли служат пространства матриц. В качестве операции $[\cdot,\cdot]$ (*скобки Ли*) в них выступает коммутатор матриц.

Example

Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(N)$ — это векторное пространство квадратных $N \times N$-матриц, скобка Ли в котором имеет вид

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Одним из сновных источников алгебр Ли служат пространства матриц. В качестве операции $[\cdot,\cdot]$ (*скобки Ли*) в них выступает коммутатор матриц.

Example

Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(N)$ — это векторное пространство квадратных $N \times N$-матриц, скобка Ли в котором имеет вид
$$[X, Y] = XY - YX.$$

Проверим косую коммутативность:

Лекция 13. Примеры алгебр Ли

Одним из сновных источников алгебр Ли служат пространства матриц. В качестве операции $[\cdot, \cdot]$ (*скобки Ли*) в них выступает коммутатор матриц.

Example

Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(N)$ — это векторное пространство квадратных $N \times N$-матриц, скобка Ли в котором имеет вид

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Проверим косую коммутативность:

$$[Y, X] = YX - XY = -(XY - YX) = -[X, Y].$$

Лекция 13. Примеры алгебр Ли

Одним из сновных источников алгебр Ли служат пространства матриц. В качестве операции $[\cdot,\cdot]$ (*скобки Ли*) в них выступает коммутатор матриц.

Example

Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(N)$ — это векторное пространство квадратных $N \times N$-матриц, скобка Ли в котором имеет вид
$$[X, Y] = XY - YX.$$

Проверим косую коммутативность:

$$[Y, X] = YX - XY = -(XY - YX) = -[X, Y].$$

Проверим тождество Якоби:

Одним из сновных источников алгебр Ли служат пространства матриц. В качестве операции $[\cdot,\cdot]$ (*скобки Ли*) в них выступает коммутатор матриц.

Example

Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(N)$ — это векторное пространство квадратных $N \times N$-матриц, скобка Ли в котором имеет вид
$$[X, Y] = XY - YX.$$

Проверим косую коммутативность:
$$[Y, X] = YX - XY = -(XY - YX) = -[X, Y].$$

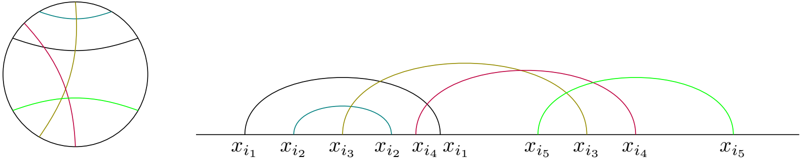
Проверим тождество Якоби:
$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \quad = \quad & (XYZ - XZY - YZX + ZYX) \\ & +(YZX - YXZ - ZXY + XZY) \\ & +(ZXY - ZYX - XYZ + YXZ) = 0.\end{aligned}$$

Лекция 13. Построение весовой системы по алгебре Ли

Исходные данные: алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с невырожденным инвариантным скалярным произведением, $(\mathfrak{g}, (\cdot,\cdot))$ $(([x,y],z) = (x,[y,z])\ \forall\ x,y,z)$; $d = \dim\ \mathfrak{g}$.

Исходные данные: алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с невырожденным инвариантным скалярным произведением, $(\mathfrak{g}, (\cdot,\cdot))$ $(([x,y],z) = (x,[y,z])\ \forall\ x,y,z)$; $d = \dim\ \mathfrak{g}$.

- Выбираем ортономированный базис $x_1,\dots,x_d$ in $\mathfrak{g}$, $(x_i,x_j) = \delta_{ij}$.
- Разрезаем окружность хордовой диаграммы D в некоторой точке и превращаем ее в дуговую диаграмму A.
- Фиксируем нумерацию $\nu : V(A) \to \{1,\dots,d\}$ дуг диаграммы A.
- Пишем буквы $x_{\nu(a)}$ на концах каждой дуги a; результат является словом в $U\mathfrak{g}$.
- Суммируем по всем нумерациям $\nu : V(A) \to \{1,\dots,d\}$.



$$D \mapsto L_{\mathfrak{g}}(D) = \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{d} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_2}x_{i_4}x_{i_1}x_{i_5}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$$

Предыдущая конструкция требует пояснения.

Definition

Универсальной обертывающей алгеброй $U\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется факторалгебра алгебры, порожденной $\mathfrak{g}$, по модулю идеала, натянутого на соотношения $[x, y] - (xy - yx) = 0$.

Предыдущая конструкция требует пояснения.

Definition

Универсальной обертывающей алгеброй $U\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется факторалгебра алгебры, порожденной $\mathfrak{g}$, по модулю идеала, натянутого на соотношения $[x, y] - (xy - yx) = 0$.

Другими словами, если мы выбрали базис $x_1, x_2, \dots, x_d$ в $\mathfrak{g}$, то универсальная обертывающая алгебра $U\mathfrak{g}$ — это алгебра многочленов от *некоммутирующих* переменных $x_1, \dots, x_d$, профакторизованная по идеалу, порожденному элементами $[x_i, x_j] - (x_i x_j - x_j x_i)$.

Предыдущая конструкция требует пояснения.

Definition

Универсальной обертывающей алгеброй $U\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется факторалгебра алгебры, порожденной $\mathfrak{g}$, по модулю идеала, натянутого на соотношения $[x, y] - (xy - yx) = 0$.

Другими словами, если мы выбрали базис $x_1, x_2, \dots, x_d$ в $\mathfrak{g}$, то универсальная обертывающая алгебра $U\mathfrak{g}$ — это алгебра многочленов от *некоммутирующих* переменных $x_1, \dots, x_d$, профакторизованная по идеалу, порожденному элементами $[x_i, x_j] - (x_i x_j - x_j x_i)$. Элемент, сопоставляемый дуговой диаграмме A, лежит в универсальной обертывающей алгебре $U\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Лекция 13. Центр универсальной обертывающей алгебры

Theorem

Для любой хордовой диаграммы D элемент $L_{\mathfrak{g}}(D)$ корректно определен, т.е. он не зависит от выбора

- *точки разрыва окружности диаграммы;*
- *ортонормированного базиса $x_1, \dots, x_d$ в $\mathfrak{g}$.*

Theorem

Для любой хордовой диаграммы D элемент $L_{\mathfrak{g}}(D)$ лежит в центре $ZU\mathfrak{g}$ ее универсальной обертывающей алгебры и удовлетворяет 4-членным соотношениям.

Лекция 13. Пример: алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$

Инвариантное невырожденное скалярное произведение на матричных алгебрах Ли можно задать с помощью следа: $(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY)$. Каждая алгебра Ли $\mathfrak{gl}(N)$ содержит подалгебру Ли $\mathfrak{sl}(N) \subset \mathfrak{gl}(N)$, состоящую из матриц с нулевым следом, $\mathfrak{sl}(N) = \{X \in \mathfrak{gl}(N) | \mathrm{Tr} X = 0\}$. Коммутатор $XY - YX$ любой пары матриц имеет нулевой след, поэтому подпространство матриц с нулевым следом в $\mathfrak{gl}(N)$ замкнуто относительно скобки Ли.

Лекция 13. Пример: алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$

Инвариантное невырожденное скалярное произведение на матричных алгебрах Ли можно задать с помощью следа: $(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY)$. Каждая алгебра Ли $\mathfrak{gl}(N)$ содержит подалгебру Ли $\mathfrak{sl}(N) \subset \mathfrak{gl}(N)$, состоящую из матриц с нулевым следом, $\mathfrak{sl}(N) = \{X \in \mathfrak{gl}(N) | \mathrm{Tr} X = 0\}$. Коммутатор $XY - YX$ любой пары матриц имеет нулевой след, поэтому подпространство матриц с нулевым следом в $\mathfrak{gl}(N)$ замкнуто относительно скобки Ли.

Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$ — алгебра 2×2-матриц с нулевым следом — это самая простая некоммутативная алгебра Ли, допускающая невырожденное инвариантное скалярное произведение. Центр универсальной обертывающей алгебры $ZU\mathfrak{sl}(2)$ этой алгебры Ли это кольцо многочленов от одной переменной, элемента Казимира $c = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \in U\mathfrak{sl}(2)$; здесь x_1, x_2, x_3 — произвольный ортонормированный базис в $\mathfrak{sl}(2)$; элемент c не зависит от выбора этого базиса.

Лекция 13. Пример: алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$

Инвариантное невырожденное скалярное произведение на матричных алгебрах Ли можно задать с помощью следа: $(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY)$. Каждая алгебра Ли $\mathfrak{gl}(N)$ содержит подалгебру Ли $\mathfrak{sl}(N) \subset \mathfrak{gl}(N)$, состоящую из матриц с нулевым следом, $\mathfrak{sl}(N) = \{X \in \mathfrak{gl}(N) | \mathrm{Tr} X = 0\}$. Коммутатор $XY - YX$ любой пары матриц имеет нулевой след, поэтому подпространство матриц с нулевым следом в $\mathfrak{gl}(N)$ замкнуто относительно скобки Ли.

Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$ — алгебра 2×2-матриц с нулевым следом — это самая простая некоммутативная алгебра Ли, допускающая невырожденное инвариантное скалярное произведение. Центр универсальной обертывающей алгебры $ZU\mathfrak{sl}(2)$ этой алгебры Ли это кольцо многочленов от одной переменной, элемента Казимира $c = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \in U\mathfrak{sl}(2)$; здесь x_1, x_2, x_3 — произвольный ортонормированный базис в $\mathfrak{sl}(2)$; элемент c не зависит от выбора этого базиса.

Весовая система $L_{\mathfrak{sl}(2)}$ происходит из *крашенного многочлена Джонса*.

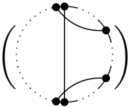
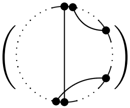
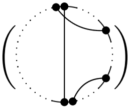
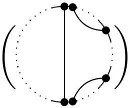
Лекция 13. Соотношения Чмутова–Варченко

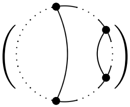
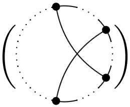
Вычисление значений весовой системы $L_{\mathfrak{g}}$ требует вычислений в некоммутативной универсальной обертывающей алгебре, хотя результат лежит в коммутативной алгебре $ZU\mathfrak{g}$. Для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ С.Чмутов и А.Варченко вывели (1997) рекуррентное соотношение, позволяющее вычислять $L_{\mathfrak{sl}(2)}$ без вычислений в некоммутативных алгебрах.

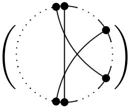
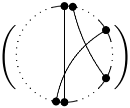
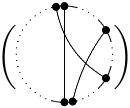
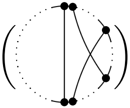
Вычисление значений весовой системы $L_{\mathfrak{g}}$ требует вычислений в некоммутативной универсальной обертывающей алгебре, хотя результат лежит в коммутативной алгебре $ZU\mathfrak{g}$. Для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ С.Чмутов и А.Варченко вывели (1997) рекуррентное соотношение, позволяющее вычислять $L_{\mathfrak{sl}(2)}$ без вычислений в некоммутативных алгебрах.

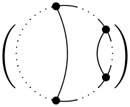
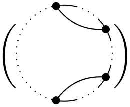
Это соотношение состоит из нескольких частей:

- $L_{\mathfrak{sl}(2)}$ на пустой хордовой диаграмме равно 1;
- $L_{\mathfrak{sl}(2)}$ мультипликативна;
- $L_{\mathfrak{sl}(2)}(D)$ на хордовой диаграмме D, в которой есть хорда, пересекающая лишь одну другую хорду, равно $L_{\mathfrak{sl}(2)}(D')$, где D' — хордовая диаграмма, полученная из D удалением выбранной хорды.

$w_{\mathfrak{sl}(2)}$  $-\, w_{\mathfrak{sl}(2)}$  $-\, w_{\mathfrak{sl}(2)}$  $+\, w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 

$=\; w_{\mathfrak{sl}(2)}$  $-\, w_{\mathfrak{sl}(2)}$  ;

$w_{\mathfrak{sl}(2)}$  $-\, w_{\mathfrak{sl}(2)}$  $-\, w_{\mathfrak{sl}(2)}$  $+\, w_{\mathfrak{sl}(2)}$ 

$=\; w_{\mathfrak{sl}(2)}$  $-\, w_{\mathfrak{sl}(2)}$  .

Лекция 13. Пример вычисления $\mathfrak{sl}(2)$-весовой системы

Семинары 13. Задачи

Семинары 13. Задачи

Семинары 13. Задачи

Семинары 13. Задачи

Семинары 13. Задачи