ОДУ-2022. Семинар №16–17

(12/13 и 13/16 декабря)

Теоретический материал и задачи для разбора на семинаре

∗Дифференцирование решений по параметру. Уравнение в вариациях

Рассмотрим задачу Коши, зависящую от параметра:

$$\dot{x} = f(x, t, \lambda), \quad x(t_0) = x_0(\lambda) \tag{1}$$

При каждом λ она имеет решение $x(t, \lambda) = x_\lambda(t)$ и, как было показано на лекции, $x(t, \lambda)$ дифференцируема по λ.

Замечание. (Объяснять это студентам необязательно, только если спросят.) Формально говоря, на лекции был рассмотрен случай, когда λ содержится только в начальном условии: $\dot{x} = f(x, t)$, $x(t_0) = \lambda$. Общий случай сводится к нему таким образом. Имея систему (1), рассмотрим новую систему, добавив к x дополнительные фазовые переменные y в количестве, равном размерности параметра λ. Тогда система

$$\dot{x} = f(x, t, y), \quad \dot{y} = 0, \quad x(t_0) = x_0(\lambda), \quad y(t_0) = \lambda$$

будет содержать параметр только в начальных условиях, а её решения совпадают с решениями системы (1) (точнее, если $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ — решение этой системы, то $y_\lambda(t) \equiv \lambda$, а $x_\lambda(t)$ — решение (1)).

Дифференцируемость по параметру требует нетривиального доказательства, однако уравнение для производной можно восстановить дифференцированием системы (1) по λ (точнее, по λ_j, если λ многомерно). Итак, дифференцируя по λ_j в точке $\lambda = \lambda^0$, мы получим

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j}(\dot{x}) = \frac{\partial}{\partial \lambda_j} f(x, t, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}.$$

Производные в левой части можно поменять местами (это опять же следует из доказательства теоремы о дифференцировании по параметру), поэтому, если обозначить $z = (\partial x/\partial \lambda_j)|_{\lambda=\lambda^0}$, мы получим

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{\lambda^0}(t), t, \lambda^0) z + \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x_{\lambda^0}(t), t, \lambda^0). \tag{2}$$

Это уравнение называется *уравнением в вариациях*. Обратите внимание, что это линейное неоднородное уравнение. Начальное условие $x(t_0) = x_0(\lambda)$ мы также дифференцируем и находим

$$z(t_0) = \left.\frac{\partial x_\lambda(t_0)}{\partial \lambda_j}\right|_{\lambda=\lambda^0} = \left.\frac{\partial x_0}{\partial \lambda_j}\right|_{\lambda=\lambda^0}.$$

Таким образом, если нам известно решение $x_{\lambda^0}(t)$ при некотором значении параметра λ^0, то для поиска производной не нужно находить явно все решения системы (1), достаточно лишь решить уравнение в вариациях.

Для вычисления высших производных можно далее дифференцировать (2) либо брать разложения Тейлора решения $x_\lambda(t)$ по степеням $(\lambda - \lambda^0)$ и выписывать коэффициенты. После подстановки в уравнение нужно будет воспользоваться тем, что производная по t остаточного члена в этой формуле Тейлора даст остаточный член в формуле для производной (опять-таки, это можно аккуратно вывести, мы принимаем это без доказательства). Мы разберём это на конкретных примерах.

Задача 16.1. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = 4ty^2, \quad \dot{y} = 1 + 5\mu x, \quad x(0) = y(0) = 0.$$

Требуется найти решение при $\mu = 0$ и его первые производные по μ: $\partial x(t, \mu)/\partial \mu|_{\mu=0}$, $\partial y(t, \mu)/\partial \mu|_{\mu=0}$.

Решение. В этом примере параметр μ в начальные данные не входит. Зависимость правых частей уравнений системы от x, y и μ полиномиальная, поэтому решение можно дифференцировать по параметру сколько угодно раз. Заметим, что в точке $\mu = 0$ наша система решается точно:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_{(0)}}{dt} = 4ty_{(0)}^2 \qquad x_{(0)}(0) = 0 \\ \dfrac{dy_{(0)}}{dt} = 1 \qquad\qquad y_{(0)}(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_{(0)}(t) = t \quad \Rightarrow \quad x_{(0)}(t) = t^4.$$

Обозначим искомые производные $\xi = (\partial x/\partial\mu)|_{\mu=0}$, $\eta = (\partial y/\partial\mu)|_{\mu=0}$. Дифференцируя систему по μ, мы получаем

$$\dot{\xi} = 4t2y\eta, \quad \dot{\eta} = 5x + 5\mu\xi, \quad \xi(0) = \eta(0) = 0.$$

Подставляя сюда $y = y_{(0)} = t$, $x = x_{(0)} = t^4$, $\mu = 0$, получаем

$$\dot{\xi} = 8t^2\eta, \quad \dot{\eta} = 5t^4, \quad \xi(0) = \eta(0) = 0.$$

Отсюда $\eta(t) = t^5$, $\xi(t) = t^8$. ◀

Задача 16.2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + \frac{2\mu}{t}, \quad x(1) = \mu - 1. \tag{3}$$

Найти явное решение для некоторого значения μ_0 параметра и производную $(\partial x/\partial\mu)|_{\mu=\mu_0}$.

Решение. Будем решать эту систему в области $t > 0$, в которой лежит начальный момент $t = 1$, поскольку правая часть $f(t, x, \mu) = x^2 + 2\mu/t$ должна быть непрерывна по своим аргументам. Заметим, что зависимость от параметра μ у правой части уравнения и функции начальных данных $a(\mu)$ полиномиальная, что допускает разложение до любого порядка по μ.

Выделенное значение параметра, при котором наша система решается точно, видно сразу: это $\mu_0 = 0$. На функцию главного приближения $x_{(0)}(t)$ получаем такую задачу Коши:

$$\frac{dx_{(0)}}{dt} = x_{(0)}^2, \quad x_{(0)}(1) = -1,$$

которая легко решается явно: $x_{(0)}(t) = -1/t$.

В данном примере $\Delta\mu = \mu - \mu_0 = \mu$ и мы приходим к такому разложению точного решения в окрестности $\mu_0 = 0$:

$$x(t, \mu) = x_{(0)}(t) + \mu\, x_{(1)}(t) + \frac{\mu^2}{2}\, x_{(2)}(t) + \ldots \tag{4}$$

При этом функция начальных данных $a(\mu) = -1 + \mu$ уже разложена в ряд по μ в нужном нам виде. Подставляя разложение $x(t, \mu)$ в правую часть уравнения задачи (3), получаем равенство:

$$x^2 + \frac{2\mu}{t} = x_{(0)}^2 + 2\mu\,(x_{(0)}x_{(1)} + 1/t) + \mu^2(x_{(1)}^2 + x_{(0)}x_{(2)}) + \ldots$$

тогда как слева будет стоять производная по времени от ряда (4). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в уравнении и в начальных данных $x(1, \mu) = a(\mu)$, получим на $x_{(0)}(t)$ уже решенную задачу (), а на последующие коэффициентные функции такие уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_{(1)}}{dt} = 2x_{(0)}x_{(1)} + \dfrac{2}{t} = -\dfrac{2}{t}\, x_{(1)} + \dfrac{2}{t} \\ x_{(1)}(1) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_{(1)}(t) = 1,$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_{(2)}}{dt} = 2(x_{(1)}^2 + x_{(0)}x_{(2)}) = 2 - 2\,\dfrac{x_{(2)}}{t} \\ x_{(2)}(1) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_{(2)}(t) = \frac{2}{3}\left(t - \frac{1}{t^2}\right).$$

Итак, мы получаем решение исходного нелинейного уравнения в виде ряда по μ с известными коэффициентами:
$$x(t,\mu) = -\frac{1}{t} + \mu + \frac{\mu^2}{3}\left(t - \frac{1}{t^2}\right) + o(\mu^2), \quad t > 0.$$
◀

Задача 16.3. Рассмотрим систему $\ddot{x} + \sin x = 0$, $x(0) = \lambda$, $\dot{x}(0) = 0$ (она описывает колебания маятника). Разложите решение по степеням λ до третьей включительно.

Решение. Решение при $\lambda = 0$ очевидно — $x(t) \equiv 0$. Итак, будем искать разложение
$$x(t) = 0 + a_1(t)\lambda + a_2(t)\lambda^2 + a_3(t)\lambda^3 + o(\lambda^3).$$
Дифференцируем это выражение по t и, считая, что $(d/dt)o(\lambda^3) = o(\lambda^3)$, подставляем в нашу систему:
$$\ddot{a}_1(t)\lambda + \ddot{a}_2(t)\lambda^2 + \ddot{a}_3(t)\lambda^3 = -\sin(a_1(t)\lambda + a_2(t)\lambda^2 + a_3(t)\lambda^3) + o(\lambda^3).$$
Учитывая разложение для синуса, а также начальные условия для a_j (они получаются разложением по λ начальных условий в исходной задаче), получаем такие задачи Коши:
$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 &= -a_1, & a_1(0) &= 1, \dot{a}_1(0) = 0,\\ \ddot{a}_2 &= -a_2, & a_2(0) &= 0, \dot{a}_2(0) = 0,\\ \ddot{a}_3 &= -a_3 + \frac{a_1^3}{6}, & a_3(0) &= 0, \dot{a}_3(0) = 0. \end{aligned}$$
Уравнение $\ddot{y} + y = 0$ имеет решением $a\cos t + b\sin t$, поэтому мы сразу получаем $a_1(t) = \cos t$, $a_2(t) = 0$. Для a_3 у нас получается неоднородное уравнение:
$$\ddot{a}_3 + a_3 = \frac{1}{6}\cos^3 t = \frac{1}{6}\frac{\cos 3t + 3\cos t}{4}.$$
В этом месте можно остановиться и обсудить только следующий вопрос: справа возникает квазимногочлен с $\lambda = \pm i$ — корнями характеристического уравнения. То есть соответствующую часть частного решения нужно искать в виде $t(a\cos t + b\sin t)$: амплитуда его колебаний растёт с ростом t. Как же это возможно, если колебания маятника, естественно, остаются ограниченными? На самом деле эти колебания уравновешиваются также растущим с ростом t остаточным членом $o(\lambda^3)$. В сущности, это «противоречие» не более удивительно, чем разложение функции $\sin((1+\mu)t)$ по степеням μ:
$$\sin((1+\mu)t) = \sin t\cos\mu t + \cos t\sin\mu t = \\ = \sin t(1 + O(\mu^2)) + \cos t(\mu t + O(\mu^3)) = \sin t + \mu t\cos t + O(\mu^2).$$
В нашей задаче механизм тот же самый: резонанс возникает за счёт того, что частота колебаний маятника всё же зависит от амплитуды.

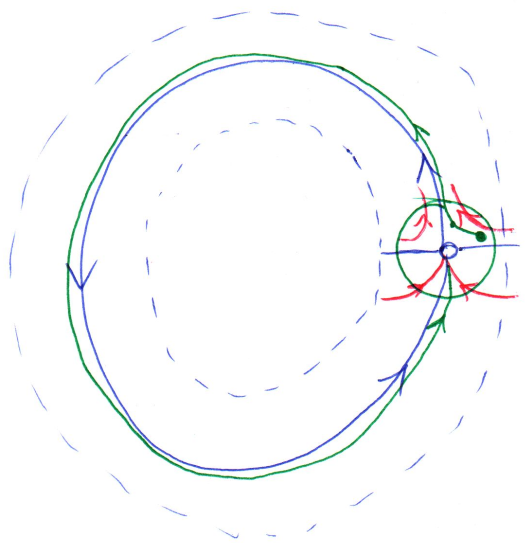
Если же время останется, можно вспомнить то, что мы делали на прошлой неделе, и дорешать задачу до конца:
$$a_3(t) = \frac{\cos t - \cos 3t}{192} + \frac{3t}{8}\sin t.$$
◀

Устойчивость

Пусть уравнение $\dot{x} = f(x)$ (для простоты ограничимся автономным случаем) имеет решением $x(t) \equiv x_0$ (то есть $f(x_0) = 0$). Это решение называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что решение уравнения с начальным условием $x(0) = \xi \in B_\delta(x_0)$ будет при всех $t \geq 0$ удовлетворять условию $x(t) \in B_\varepsilon(x_0)$. Решение называется *асимптотически* *устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое $\delta_0 > 0$, что все решения с начальным условием $x(0) = \xi \in B_{\delta_0}(x_0)$ стремятся к x_0: $x(t) \to x_0$ при $t \to +\infty$.

Аналогичные определения можно дать для (локального) диффеоморфизма F, имеющего неподвижную точку x_0 (то есть $F(x_0) = x_0$): эта точка *устойчива по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для любой $\xi \in B_\delta(x_0)$ и любого $n \geq 0$ верно, что $F^n(\xi) \in B_\varepsilon(x_0)$. Точка x_0 *асимптотически устойчива*, если она устойчиво по Ляпунову и существует такое $\delta_0 > 0$, что при всех $\xi \in B_{\delta_0}(x_0)$ верно, что $F^n(\xi) \to x_0$ при $n \to \infty$.

Замечание. (Обсуждайте этот вопрос только если хватает времени.) Из условия стремления $x(t) \to x_0$ устойчивость по Ляпунову не вытекает: может так случиться, что прежде чем приближаться к x_0, некоторые траектории, начинающиеся сколь угодно близко к x_0, должны отойти от x_0 на расстояние порядка константы. Например, можно рассмотреть такое уравнение на окружности: $\dot\varphi = 1 - \cos\varphi$. У него есть единственная полуустойчивая особая точка $\varphi = 0 \pmod{2\pi}$, поэтому траектория с $\varphi \in (0, \delta)$ уйдёт из окрестности нуля, сделает полный оборот и будет стремиться к 2π (то есть к тому же нулю) слева. Из этого уравнения на окружности можно сделать систему на проколотой плоскости с тем же поведением траекторий в окрестности точки $(x_0, y_0) = (1, 0)$, для этого нужно в полярных координатах добавить к вышеприведённому уравнению для φ уравнение $\dot r = 1 - r$. Вот как это выглядит на фазовом портрете:



Здесь красным показано локальное поведение траекторий вблизи особой точки $(x_0, y_0) = (1, 0)$ (такая особая точка называется *седлоузел*), а зелёным — траектория одной из точек из верхней половины окрестности: она обходит вокруг окружности, удаляясь во время обхода от (x_0, y_0) на расстояние, большее 1.

Во многих случаях для анализа устойчивости достаточно линеаризации системы. Для систем ДУ мы уже обсуждали, что означает, что $\dot y = Ay$ — линеаризация системы $\dot x = f(x)$. Для диффеоморфизмов нужно взять его дифференциал $M := dF = F_*$: в точке x_0:

$$F(x) = x_0 + M(x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

Неформально говоря, условия устойчивости получаются так: если для линейной системы есть приближение/убегание траекторий с экспоненциальной скоростью, то и нелинейная система обладает тем же свойством, а если всё происходит медленнее, то в нелинейном случае может получиться по-разному. Более точно:

1. Пусть A имеет собственное значение λ в правой полуплоскости $\{\operatorname{Re}\lambda > 0\}$. Тогда точка x_0 неустойчива по Ляпунову для уравнения $\dot x = f(x)$.

2. Если же все собственные значения λ матрицы A лежат в левой полуплоскости $\{\operatorname{Re}\lambda < 0\}$, то имеет место асимптотическая устойчивость.

Аналогичным образом, для диффеоморфизмов получим

1. Пусть M имеет собственное значение λ вне замкнутого единичного круга: $|\lambda| > 1$. Тогда точка x_0 неустойчива по Ляпунову для отображения $x \mapsto F(x)$

2. Если же все собственные значения λ матрицы M лежат в открытом единичном круге $\{|\lambda| < 1\}$, то имеет место асимптотическая устойчивость.

Запомнить условия нетрудно: нужно вспомнить, как решаются линейные системы $\dot{y} = Ay$. Если A жорданова, то решение будет содержать выражения вида $t^k e^{\lambda t}$, стремление которых к нулю/бесконечности управляется как раз $\operatorname{Re}\lambda$. Для итераций линейного отображения $y \mapsto My$ также достаточно рассмотреть в случае жордановой M и там будут выражения вида $n^k \lambda^n$, поэтому и нужно сравнивать модуль λ с единицей.

Задача 16.4. Докажите, что при достаточно близких к нулю значениях параметра a отображение $F(x) = x + a\sin x$ будет диффеоморфизмом прямой. Найдите его неподвижные точки и исследуйте их устойчивость.

Решение. Выясним сначала, когда F является локальным диффеоморфизмом: $F'(x) = 1 + a\cos x$, поэтому если $|a| < 1$, то $F'(x) > 0$ при всех x. Следовательно, при $|a| < 1$ функция F будет строго монотонной. Остаётся только проверить, что $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Но это очевидно, поскольку $F(\mathbb{R})$ — связное подмножество прямой, содержащее точки $F(\pi k) = \pi k$ при всех k.

Неподвижные точки — решения уравнения $F(x) = x$ — это как раз πk (если $a \neq 0$), производная там равна $1 + a(-1)^k$ (в этом случае M будет матрицей размера 1×1, единственный элемент которой равен $a(-1)^k$). Поэтому при $a > 0$ точки $2n\pi$ будут неустойчивыми ($|1 + a| > 1$), а точки $(2n+1)\pi$ — устойчивыми ($|1 - a| < 1$). При $a < 0$ всё будет наоборот.

Наконец, при $a = 0$ все точки неподвижны: $F(x) \equiv x$. Линеаризация имеет собственное значение 1 и не позволяет судить об устойчивости. Но для тождественного отображения это и не нужно: прямо из определения следует, что все неподвижные точки будут устойчивы по Ляпунову, но не асимптотически. ◀

Задача 16.5. При каких значениях a особая точка $(0, 0)$ системы уравнений

$$\dot{x} = ax + y + (a+1)x^2, \quad \dot{y} = x + ay$$

асимптотически устойчива? Усточива по Ляпунову, но не асимптотически? Неустойчива?

Решение. Спектр матрицы линеаризации

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

состоит из чисел $a + 1$ и $a - 1$. Поэтому при $a > -1$ собственное значение $a + 1$ попадает в правую плоскость, и особая точка неустойчива. Напротив, при $a < -1$ оба корня лежат в левой полуплоскости, поэтому имеем место асимптотическая устойчивость.

Осталось разобрать случай $a = -1$, когда линеаризация не позволяет судить об устойчивости. При $a = -1$ система имеет вид

$$\dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = x - y.$$

Таким образом, система оказалась линейной со спектром $\{0, -2\}$. Её решения будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Поэтому устойчивость имеет место, но не асимптотическая (это особенно легко увидеть, перейдя к тому базису, где матрица диагонализована). ◀

Об устойчивости можно говорить не только для неподвижных точек, но и для периодических траекторий дифференциального уравнения. Пусть $x_0(t)$ — такое периодическое решение, T — его период: $x_0(t+T) = x_0(t)$. (При этом мы запрещаем, чтобы $x_0(t) = \mathrm{const}$ — это рассмотренный ранее случай особой точки векторного поля.)

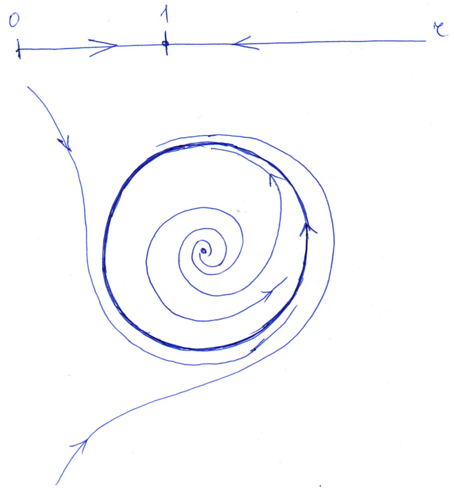
В этой ситуации возможны два разных подхода к определению устойчивости. Во-первых, можно повторить вышеприведённые определения: периодическая траектория $x_0(t)$ *устойчива по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что любое решение с начальным условием $x(0) \in B_\delta(x_0(0))$ удовлетворяет при всех $t \geq 0$ условию $x(t) \in B_\varepsilon(x_0(t))$.

Можно также дать определение асимптотической устойчивости: периодическая траектория *асимптотически устойчива*, если она устойчива по Ляпунову и $\mathrm{dist}(x_0(t), x(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех траекторий с $x(0) \in B_{\delta_0}(x_0(0))$. Однако это определение никогда не выполняется: можно взять траекторию $x(t) \equiv x_0(t+\tau)$ при малом τ, тогда $x(0) = x_0(\tau)$ попадёт в $B_{\delta_0}(x_0(0))$, но $\mathrm{dist}(x_0(t), x(t)) = \mathrm{dist}(x_0(t), x_0(t+\tau))$ будет периодической функцией и к нулю не стремится.

Задача 16.6. Рассмотрим векторное поле на плоскости, которое в полярных координатах записывается как
$$\dot{r} = r - r^2, \quad \dot{\varphi} = 1.$$
Нарисуйте его фазовый портрет. Будет ли периодическая траектория $\{r = 1\}$ устойчива?

Решение. Уравнение $\dot{r} = r - r^2$ имеет неподвижными точками $r = 0$ и $r = 1$. На интервале $(0, 1)$ имеем $\dot{r} > 0$, то есть такое решение на $+\infty$ стремится к 1, а на $-\infty$ стремится к 0. Аналогичным образом, $\dot{r} < 0$ при $r > 1$, то есть решение стремится к 1 при $t \to +\infty$. (При $t \to -\infty$ говорить о пределе не приходится: решения в обратном времени убегают на бесконечность за конечное время, мы это обсуждали на одном из сентябрьских семинаров.)

По φ динамика очень простая — вращение с единичной угловой скоростью. Объединяя эти два описания, получаем фазовый портрет, показанный на рисунке.



Перейдём к анализу устойчивости. Периодическая траектория задаётся в полярных координатах как $X_0(t) = (r_0(t) \equiv 1,\, \varphi_0(t) = t)$. Траектория, начинающаяся в точке $\hat{X} = (\hat{r}, \hat{\varphi})$ будет иметь вид $X(t) = (r(t), \varphi(t) = \hat{\varphi} + t)$. При этом $r(t)$ на интервале времени $(0, +\infty)$ монотонно изменяется от $\hat{r}$ до 1. Значит, разность полярных углов $X_0(t)$ и $X(t)$ не меняется, а разность радиусов монотонно стремится к нулю, поэтому устойчивость по Ляпунову имеет место (можно взять $\delta = \varepsilon$). ◀

Следующий пример, однако, показывает, что здесь всё не так просто.

Задача 16.7. Рассмотрим векторное поле на плоскости, которое в полярных координатах записывается как
$$\dot{r} = (1-r)^3, \quad \dot{\varphi} = r.$$
Нарисуйте его фазовый портрет в окрестности единичной окружности. Будет ли единичная окружность устойчивой по Ляпунову в смысле данного выше определения?

Решение. Рассуждения из решения предыдущей задачи дословно повторяются, поэтому качественно фазовый портрет получается таким же. Чтобы исследовать устойчивость, решим первое уравнение (в нём переменные разделяются):

$$t - t_0 = \frac{1}{2(1-r)^2} - \frac{1}{2(1-r_0)^2}.$$

Аналогичным образом мы можем сказать, что траектория задаётся уравнением $d\varphi/dr = \dot\varphi/\dot r = r/(1-r)^3$, откуда

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{r}{(1-r)^3} dr = \frac{2r-1}{2(1-r)^2} - \frac{2r_0-1}{2(1-r_0)^2}.$$

При движении по единичной окружности было верно, что $\varphi - t = \mathrm{const}$. Посмотрим, что получается на других траекториях:

$$\varphi - t = \mathrm{const} + \frac{2r-1}{2(1-r)^2} - \frac{1}{2(1-r)^2} = \mathrm{const} + \frac{1}{r-1}.$$

Поскольку $r \to 1$ при $t \to +\infty$, мы получим, что разность стремится к бесконечности. Это значит, что вращение точки на близкой траектории на бесконечно много оборотов «опередит» вращение точки на самой единичной окружности (или «отстанет от неё», в зависимости от того, снаружи точка приближается или изнутри). Поэтому всегда можно выбрать момент времени, когда рассинхронизация по углу между $x_0(t)$ и $x(t)$ составит половину оборота, а тогда точки будут на расстоянии порядка 2, а не меньше ε. ◄

Разумно считать, что в подобной ситуации устойчивость всё-таки есть. Формально говорят об *орбитальной устойчивости*, однако слово «орбитальная» часто опускают (из контекста обычно ясно, что имеется в виду). А именно, пусть $\mathcal{X} = \{x_0(\tau) : \tau \in [0, T]\}$ — рассматриваемая периодическая траектория, она *орбитально устойчива по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для любой траектории $x(t)$ с начальным условием $x(0) = \xi$, $\mathrm{dist}(\xi, \mathcal{X}) < \delta$ при всех $t \geq 0$ верно, что $\mathrm{dist}(x(t), \mathcal{X}) < \varepsilon$. Эта траектория *орбитально асимптотически устойчива*, если она орбитально устойчива по Ляпунову и $\mathrm{dist}(x(t), \mathcal{X}) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех решений с начальным условием $x(0) = \xi \in B_{\delta_0}(\mathcal{X})$.