Дифференциальные уравнения. Листок 2

Срок сдачи 16 декабря. Листок сдается очно ориентировочно 19 или 20 декабря по предварительной записи (через гугл-форму на странице курса). Запись заканчивается 16 декабря. Записываются те, кто решил не менее трех задач.

Задача 1 $(1+2)$**.** Докажите, что корни уравнения $z^n = 1$ образуют группу порядка n по умножению. Сформулируйте и докажите обратную теорему.

Задача 2 $(3+1)$**.** a) Покажите, что если матрицы $A(t)$ коммутируют друг с другом при разных значениях t, то для решения уравнения $\dot{x} = A(t)x$ верна формула $x(t) = \exp \int (A(t)dt)c$, где c — произвольный вектор.
b) На примере системы $\dot{x} = y, \dot{y} = tx$ покажите, что эта формула неверна в общем случае.

Задача 3 (4)**.** Найдите пример двух некоммутирующих линейных операторов A и B, для которых $e^{A+B} = e^A e^B$.

Задача 4 (7)**.** Для любой непрерывной функции f на окружности и любого угла φ для которого отношение $\frac{\varphi}{2\pi}$ иррационально, докажите, что временное среднее функции f вдоль орбиты иррационального поворота на угол φ, то есть величина

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x+k\varphi),$$

равна пространственному среднему $\frac{1}{2\pi}\int_{S^1} f(x)dx$.

Указание. Рассмотрите случай, когда f — тригонометрический многочлен, а затем воспользуйтесь теоремой Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическим многочленом.

Задача 5 (3)**.** Полно ли пространство непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ с нормой $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$?

Задача 6 (5)**.** Найдите производную 2π-периодического решения уравнения

$$\dot{x} + \sin x = \varepsilon \cos t,$$

обращающегося при $\varepsilon = 0$ в $x \equiv 0$, по ε при $\varepsilon = 0$.

Задача 7 $(5+2)$**.** Исследуйте на устойчивость нулевое решение системы $\dot{x} = A(t)x$, в которой матрица A 2-периодическая, причем

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & -b \\ b & 2 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1),$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad t \in [1,2),$$

если a) $b = 1$; b) $b = \frac{3}{2}$.

Замечание. Правая часть нашей системы разрывна при $t \in \mathbb{Z}$, поэтому стандартные определения из курса к ней неприменимы. Будем называть решениями такой системы функции $x(t)$, которые непрерывны на всей прямой и удовлетворяют уравнению $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ при $t \notin \mathbb{Z}$.