

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2023  
ЛИСТОК 1

1. Найдите действительные и мнимые части следующих комплексных чисел:

(а)  $\frac{5}{1+2i} + \frac{5}{2-i}$ , (б)  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ , (в)  $\frac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i)^4}$ , (г)  $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$

2. Найдите модули и аргументы следующих комплексных чисел:

(а)  $(\sqrt{3}-i)^{2023}$ , (б)  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$ , (в)  $\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  
(г)  $\frac{e^{i\alpha}+1}{e^{i\alpha}-1}$ ,  $0 < \alpha < 2\pi$ .

3. Докажите, что многочлен  $f(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha$  делится на  $x^2 + 1$ .

4. Выразите  $\sin 4x$  как многочлен от  $\sin x, \cos x$ .

5. Решите уравнение  $\bar{z} = z^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

6. Решите уравнения  $z^2 = 5 - 12i$ ,  $z^4 + 4 = 0$ .

7. Пусть  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  – все корни уравнения  $z^n = 1$ , где  $n$  – натуральное число. Найдите сумму  $\zeta_1^k + \dots + \zeta_n^k$  для каждого натурального  $k$ .

8. Точки  $z_1$  и  $z_2$  – смежные вершины правильного  $n$ -угольника. Найдите вершину  $z_3$ , смежную с  $z_2$  ( $z_3 \neq z_1$ , нумерация против часовой стрелки).

9. Докажите, что комплексные числа  $a, b, c$  представляют вершины равностороннего треугольника тогда и только тогда, когда

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac.$$

10. Найдите произведение длин отрезков, соединяющих вершину правильного  $n$ -угольника со всеми остальными вершинами, если длина стороны равна 1.

11. Дайте геометрическое описание множеств

(а)  $\{z: |z - z_1| = |z - z_2|\}$ ,  
(б)  $\{z: |z - 1| + |z + 1| = 2a\}$  ( $a > 1$ ),  
(в)  $\{z: \operatorname{Re}(1/z) = \frac{1}{2}\}$ .

12. Пусть  $a, b, c, d$  – четыре различные точки на единичной окружности. Найдите точку пересечения прямых  $ab$  и  $cd$ .

13. Докажите равенство

$$|\sqrt{z^2 - 1} + z| + |\sqrt{z^2 - 1} - z| = |z - 1| + |z + 1|.$$

**14.** Пусть  $P(z)$  – многочлен степени  $n$ , имеющий  $n$  вещественных корней (с учетом кратности),  $a$  – произвольное вещественное число. Докажите, что многочлен  $Q(z) = P(z + ia) + P(z - ia)$  тоже имеет  $n$  вещественных корней.

**15.** Найдите, во что переводят координатную сетку следующие отображения из  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{C}$ : (а)  $z \mapsto z^2$ ; (б)  $z \mapsto e^z$ ; (в)  $z \mapsto 1/z$ .

**16.** Отображение  $z \mapsto z + (1/z)$  определено на множестве всех ненулевых комплексных чисел.

(а) Во что это отображение переводит множество  $\{z: |z| > 1\}$ ?

(б) Является ли это отображение взаимно-однозначным на данном множестве?

**17.** Пусть  $A > 0, C$  действительные, а  $B$  – комплексная постоянные и пусть  $AC < |B|^2$ . Докажите, что уравнение

$$A|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$$

является уравнением окружности и найдите центр этой окружности и ее радиус.

**18.** Напишите уравнение окружности, проходящей через три различные точки  $z_1, z_2, z_3$ , не лежащие на одной прямой.

**19.** Пусть отображение задано формулой  $z \mapsto Az + B\bar{z}$ . Во что оно переводит окружность с центром в нуле?