На этом семинаре мы тренируемся

* определять число степеней свободы механической системы
* определять силы и связи, действующие в мех. системе
* выписывать и решать уравнения Ньютона.

Всё это — на простейших примерах

Сначала комментарий о связях, которые порождают силы реакции

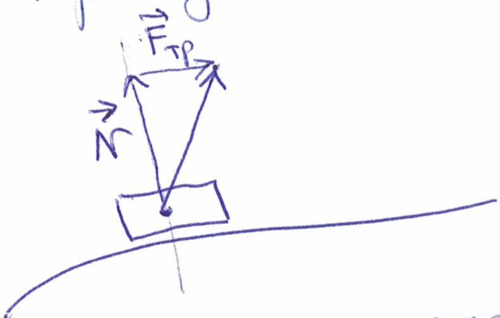
В наших моделях связи реализуются

а) поверхностями или линиями, ограничивающими движение тел.

б) жесткими стержнями или гибкими нерастяжимыми нитями, связывающими части механической системы между собой.

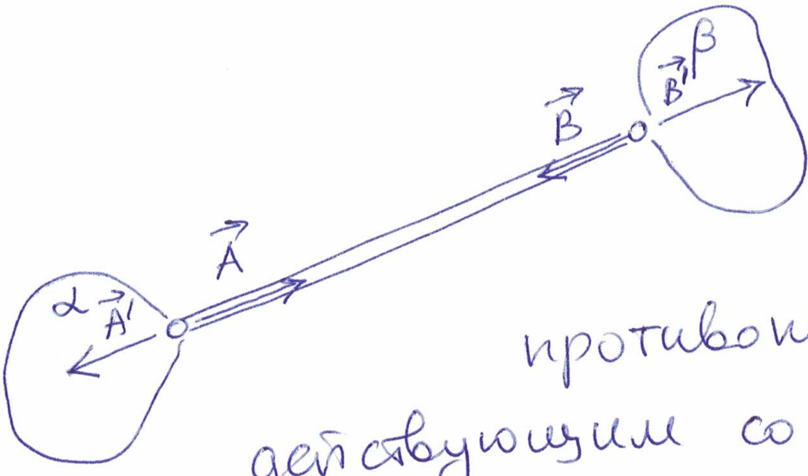
Какие при этом образуются силы реакции?

При движении тела по поверхности (линии)



нормальная составляющая силы, действующей со стороны поверхности на тело, традиционно называется силой реакции опоры $\vec N$. Тангенциальная составляющая называется силой трения $\vec F_{тр}$. Из опыта: $\vec F_{тр}$ направлено против движения тела. В наших задачах $\vec F_{тр}$ почти не будет встречаться.

Если два тела α и β соединены нерастяжимым (жестким) стержнем, то, согласно 3-му закону Ньютона,



силы $\vec A$ $(\vec B)$, действующие на стержень со стороны тел α (β) противоположны силам $\vec A'$ $(\vec B')$ действующим со стороны стержня на тела α (β):

$$\vec A = -\vec A', \quad \vec B = -\vec B'.$$

Предположив, что стержень невесом,

мы заключаем, что сумма сил, действующих на него $= 0$:

$$\vec{A} = -\vec{B},$$

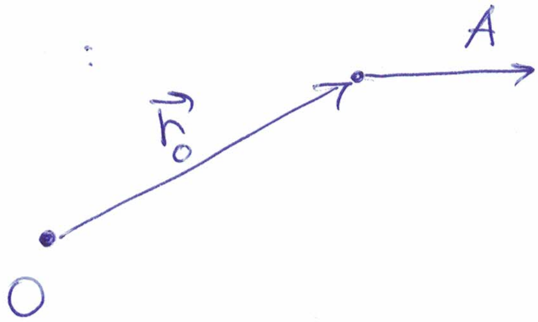
иначе он получил бы ∞ ускорение.

Кроме того, ситуация

$\alpha \neq 0$

невозможна. Действительно, невесомый стержень имеет нулевой момент инерции. Значит, если относительно какой-либо точки сумма моментов сил, действующих на стержень, $\neq 0$, то он получит ∞ угловое ускорение вращения вокруг этой точки (2-й закон Ньютона для моментов сил — вспоминаем школу).

Напоминание: момент силы $\vec{A}$ относительно точки O :



$$\boxed{\vec{M}_{A,O} = [\vec{r}_O, \vec{A}]}$$

векторное произведение

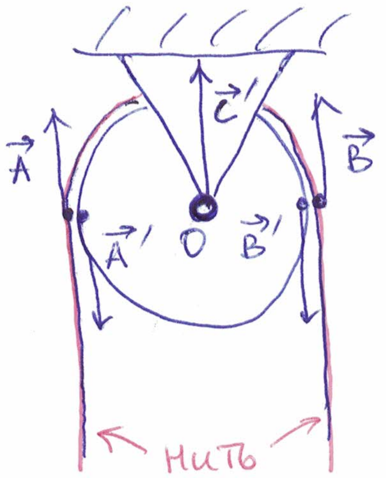
Проверьте сами, что требование

$$\vec{M}_{A,O} + \vec{M}_{B,O} = 0 \quad \forall \text{ точки } O$$

в случае стержня приводит к условиям

$\vec{A} = -\vec{B}$ и направлены вдоль стержня

Теперь о нерастяжимых нитях, которые, как правило, перекинуты через колёса блоков



$\vec{A}'$, $\vec{B}'$, $\vec{C}'$ – силы, действующие на блок.

Поскольку он никуда не улетает:

$$\vec{C}' = -(\vec{A}' + \vec{B}')$$

$\vec{A}$, $\vec{B}$ – силы, действующие со стороны блока на (разные) куски нити.

По 3-му закону Ньютона $\vec{A}' = -\vec{A}$, $\vec{B}' = -\vec{B}$.

Какова связь $\vec{A}$ и $\vec{B}$?

Для ответа надо уточнить, как нить взаимодействует с колесом блока. Есть 2 варианта:

блок крутится вокруг т. O без трения

a) блок невесом, нить по нему не проскальзывает. Нить абсолютно гибкая, т.е. при ее изгибе не возникает поперечных сил упругости.

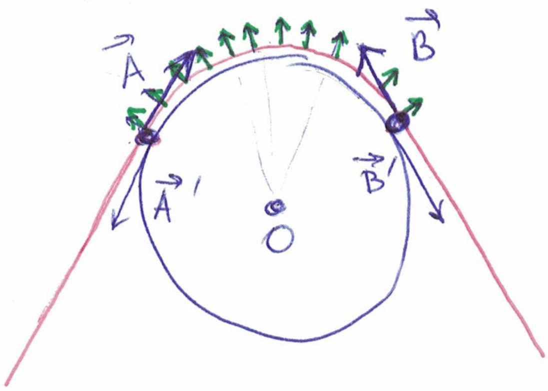
Тогда $\vec{A}$ и $\vec{B}$ в точках их приложения касательны к нити и должны создавать противоположные моменты относительно точки O крепления блока: $\vec{M}_{A,O} + \vec{M}_{B,O} = 0$,

иначе блок завертится с ∞ ускорением.

Значит $|\vec{A}| = |\vec{B}|$ и "закручивают" блок в разные стороны.

Второй вариант:

б) поверхность блока абсолютно скользкая наша абсолютно гибкая нить скользит по нему без трения:



$\vec{A}'$, $\vec{B}'$ — силы, действующие со стороны концов нити на ее кусок, лежащий на блоке
$\vec{A}$, $\vec{B}$ — силы, действующие со стороны этого куска на концы нити.

Очевидно (3 закон Ньютона) $\vec{A} = -\vec{A}'$, $\vec{B} = -\vec{B}'$.

Зелеными стрелками обозначены силы реакции опоры, действующие со стороны блока, на лежащий на нём кусок нити.

Если нить невесома, то суммарный момент сил, действующих на лежащий на блоке кусок нити относительно центра блока O должен $= 0$. Зелёные силы относительно точки O имеют нулевые моменты, поэтому

$$\vec{M}_{A',O} + \vec{M}_{B',O} = 0$$

и вывод тот же:

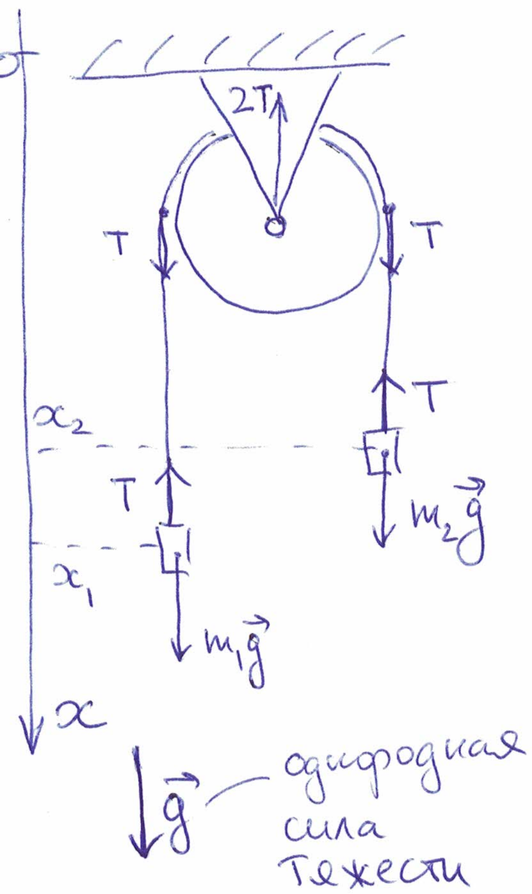
$|\vec{A}| = |\vec{B}|$ и они направлены вдоль нити в точке своего приложения, причем "тащат" нить в разные стороны.

Заметим, что в варианте б) вывод тот же, а условия были другие.

Rem А что было бы, если бы колесо блока не было круглым? Стали бы выводы для вариантов а) и б) разными?

После такого долгого обсуждения модельных свойств сил реакции начнем решать задачи:

Пример 1 (машина Атвуда)



Рис

На блоке повешены два грузика массами m_1 и m_2. Блок и нить удовлетворяют обсуждавшимся выше модельным представлениям

В системе действует однородная сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$ (см. рис.)

? Сколько у системы степеней свободы?

Ответ: #свободы = 1

Этот ответ на самом деле сделан в дополнительных предположениях о том, что грузики не раскачиваются, а движутся строго вверх-вниз по вертикали. Тогда, если зафиксировать координату, например, первого грузика x_1 по оси $\vec{Ox}$ (см. рис.), то координата второго грузика – x_2 – определяется однозначно.

У системы единственная степень свободы – например x_1.

На координаты грузиков есть связь:

$$\boxed{x_1 + x_2 = \text{const}}$$ – эта константа неважна.

или:

$$\boxed{\dot{x}_1 = -\dot{x}_2}$$

Обозначение: $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ (полагаем $x = x(t)$)

? Нарисуйте силы, действующие на грузики и на блок

Ответ: смотри на рисунке.

Здесь T – величина силы, а направления сил указаны стрелками.

Все пояснения по этому рисунку были сделаны ранее.

? Напишите уравнение движения грузиков — уравнения Ньютона.

Ответ:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T \\ m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T \end{cases}$$

Уравнение движения 1-го грузика в проекции на выбранную на Рис. ось Ox

то же самое для 2-го грузика.

Это мы написали ур-ния Ньютона в инерциальной системе отсчета, связанной с осью $\vec{Ox}$, т.е., очевидно, с поверхностью земли.

С учётом связи $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$ уравнения решаются относительно двух неизвестных величин:

координаты грузика $\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = -\ddot{x}_2$

и заранее неизвестной силы натяжения нити $T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

Имеем равноускоренное движение грузиков

Тут для самопроверки полезно посмотреть на ответы в очевидных предельных случаях:

а) $m_2 = 0 \Rightarrow$ свободное падение грузика m_1:

$\ddot{x}_1 = g$, $T = 0$ — нить не натягивается.

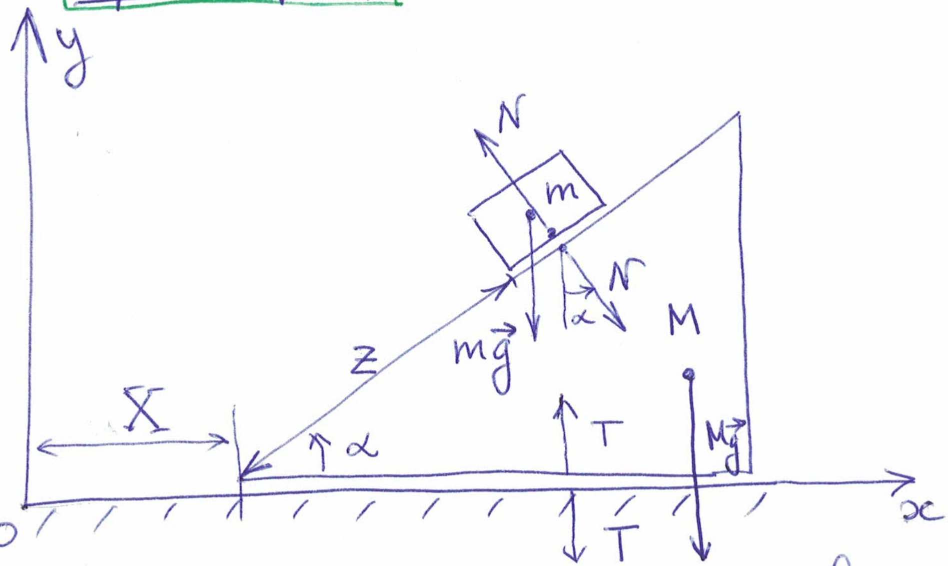
б) $m_1 = 0 \Rightarrow$ свободное падение грузика m_2:

$\ddot{x}_1 = -g = -\ddot{x}_2$, $T = 0$ — нить не напряжена.

в) $m_1 = m_2 = m \Rightarrow$ грузики уравновешивают друг друга и движутся без ускорения $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$.

$T = mg$ — натяжение нити компенсирует силу тяжести грузиков

Пример 2



Клин на горизонтальной плоскости.

Кирпич на клине

Их массы m и M, соответственно.

Трения нет.

По вертикали вниз действует однородная сила тяжести $\vec{g}$. Угол клина — α.

? Сколько степеней свободы в системе?

Ответ: #своб. = 2

Комментарий: Фиксируем клин (координата его острия на оси $O\vec{x}$ — X), и фиксируем кирпич на клине (z — расстояние от острия клина до кирпича). x и z — две степени свободы.

? Какие связи есть в системе?

У кирпича и клина на плоскости по 2 степени свободы (считаем, что они "не вертятся" — это тоже модельное предположение).

2×2 — 4 степени свободы на двоих.

Нужны 2 связи, чтобы в системе осталось 2 степени свободы.

1) Координата Y клина по оси $\vec{Oy}$ = 0 (11)

2) Координаты $x_к$ и $y_к$ кирпича линейно связаны, с участием координаты X конца клина по оси $\vec{Ox}$.

Это — потому, что кирпич лежит на клине. Имеем:

$$\begin{cases} x_к = X + z\cos\alpha \\ y_к = z\sin\alpha \end{cases}$$

Действительно, у системы 2 независимых координаты: X и z.

(?) Напишите уравнения движения.

Ответ:

Клин:
$$\begin{cases} M\ddot{X} = N\sin\alpha & (1) \\ M\underbrace{\ddot{Y}}_{0} = -N\cos\alpha + T - Mg & (2) \end{cases}$$

Кирпич:
$$\begin{cases} m(\ddot{X} + \ddot{z}\cos\alpha) = -N\sin\alpha & (3) \\ m\ddot{z}\sin\alpha = -mg + N\cos\alpha & (4) \end{cases}$$

При записи этих уравнений Ньютона мы:

а) выбрали инерциальную систему отсчета с осями $\vec{Ox}$, $\vec{Oy}$ (см. рис.)

б) нарисовали в системе все силы: силы тяжести кирпича $m\vec{g}$ и клина $M\vec{g}$; силы реакции плоскости — T и поверхности клина на кирпич — N в) напишем 2-й закон Ньютона в проекциях на $O\vec{x}$ и $O\vec{y}$ для кирпича и для клина

г) подставим условия связи.

При решении уравнение проекции клина на $O\vec{y}$ можно не учитывать, если нас не интересует значение реакции плоскости T.

Остаётся система 3-х линейных уравнений на 3 неизвестных: координаты X и Z, и силу N.

Выразив N и $\ddot{X}$ из (1) и (3):

$$\ddot{X} = -\frac{m}{M+m}\cos\alpha\,\ddot{Z}$$

$$N = -\frac{mM}{m+M}\operatorname{ctg}\alpha\,\ddot{Z}$$

подставляем N в (4) и получаем:

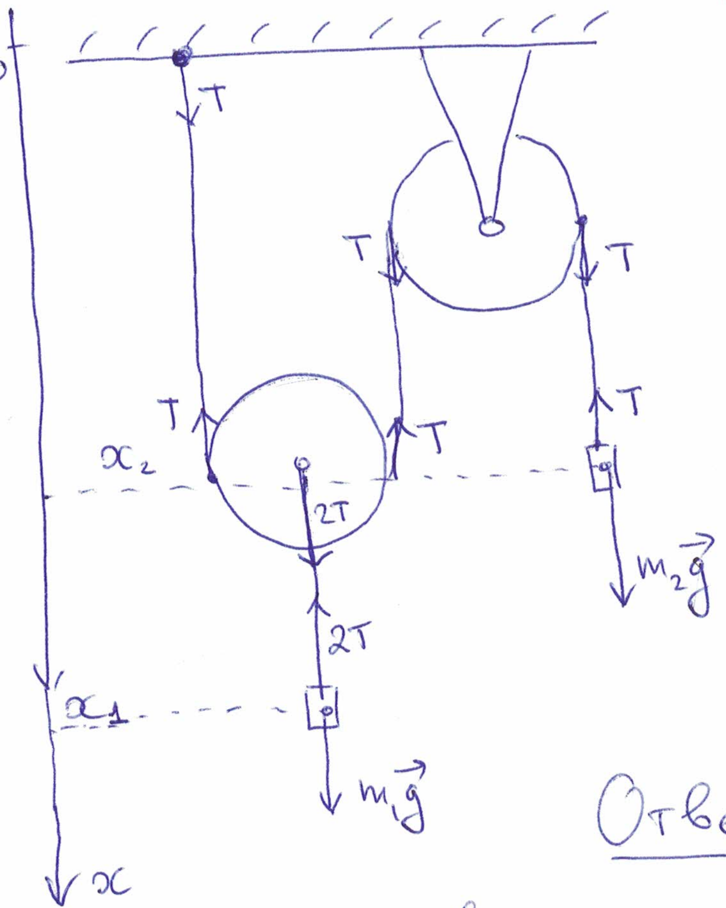
$$\boxed{\ddot{Z} = -\frac{(M+m)\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}g \qquad \ddot{X} = \frac{m\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}g}$$

Для оценки правдоподобности ответа рассмотрите предельные случаи:

$m \to 0$, $\alpha \to 0$

$M \to 0$, $\alpha \to \pi/2$

Пример 3 Более сложный блок (см. рис)



? Сколько степеней свободы у этой системы?

Ответ: # своб. = 1
(система фиксируется, если определить координату любого грузика, скажем x_1).

? Какие связи на координаты частей системы?

Ответ: Частями системы считаем движущиеся по вертикали грузики m_1 и m_2. Левый блок тоже движется по вертикали. Но его считаем невесомым, поэтому он лишь участвует в задании связи x_1 и x_2, но сам не влияет на динамику системы. (был бы массивным, пришлось бы учитывать и его поступательное движение, и возможное вращение).

Нить нерастяжима, поэтому

$$\text{или}\quad \left|\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = \text{const} \\ \dot{x}_2 = -2\dot{x}_1 \end{array}\right.$$

? Расставьте действующие в системе силы натяжения нитей, запишите и решите уравнения Ньютона.

Решение: Расстановку сил натяжения см. на рисунке. При расстановке сил для левого блока мы учли его невесомость (а значит и отсутствие момента инерции)

Уравнения Ньютона для обоих грузиков в проекции на ось $O\vec{x}$ (система отсчета Земли):

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - 2T \\ m_2\ddot{x}_2 \underset{\text{связь}}{=} -2m_2\ddot{x}_1 = m_2 g - T \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2} g \\ T &= \frac{3m_1 m_2}{m_1 + 4m_2} g \end{aligned}}$$

Предельные случаи для оценки правдоподобности ответа:

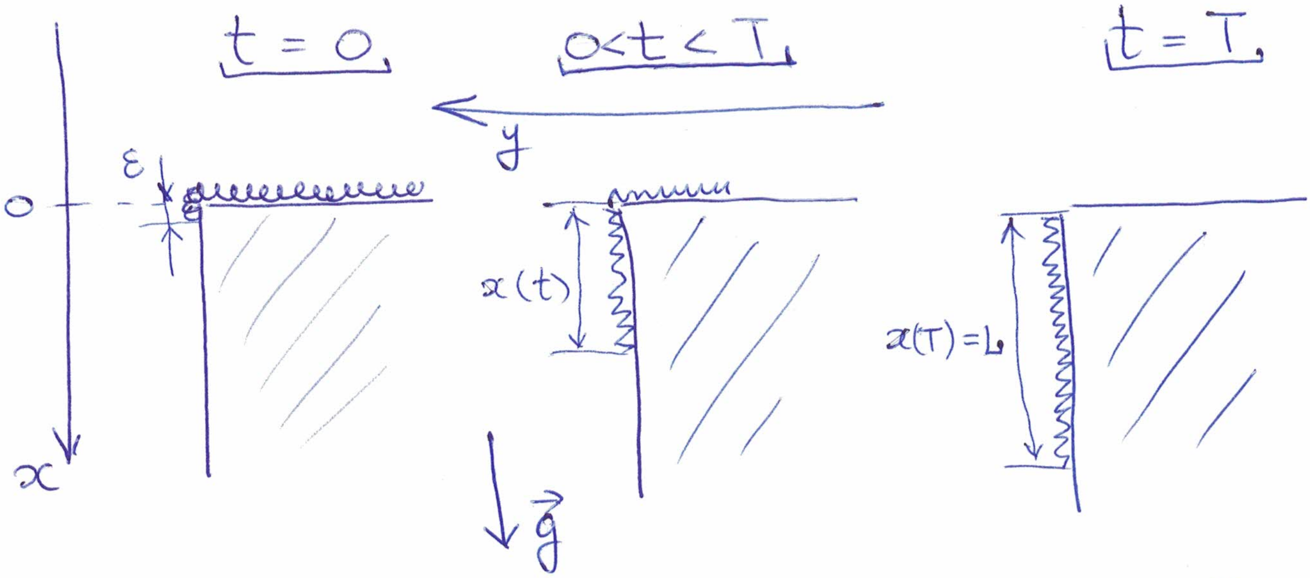
$m_2 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 = g,\ T = 0$

$m_1 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 = -g/2,\ \ddot{x}_2 = g,\ T = 0$

$m_1 = 2m_2 \Rightarrow$ движение с постоянной скоростью $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$, $T = g.$

Пример 4 Более замысловатый.

Падающая со стола цепь



Нерастяжимая, однородная, абсолютно гибкая цепь массы M и длины L сползает со стола (см. Рис.) Трения нет, есть однородная сила тяжести $\vec{g}$.

Начальные условия задачи

$$x(0) = \varepsilon > 0 \quad , \quad \dot{x}(0) = 0$$

Здесь $x(t)$ – координата нижнего конца цепи в момент времени t (см. Рис).

Выбрали $\varepsilon > 0$ (можно считать ε малым), чтобы цепь начала сползать

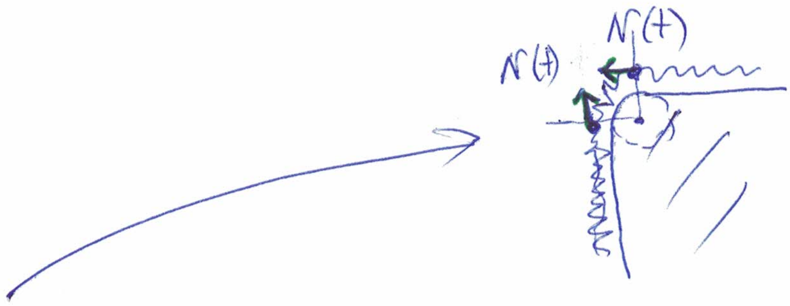
? Какова скорость цепи в момент времени $t = T$, когда задний конец цепи сваливается со стола?

Решение.

Очевидно система имеет 1 степень свободы: положение нижнего конца цепи $x(t)$ однозначно определяет конфигурацию системы в момент t.

Чтобы написать уравнение движения системы разберем действующие силы реакции:

$$0 < t < T$$



Это угол стола со сползающей цепью. Все увеличено. Край стола — примерно похож на кусок колеса блока, по которому скользит нить.

Пользуясь модельными рассуждениями из введения к семинару, заключаем, что на свисающий и на лежащий на столе куски цепи действует одинаковая по величине $N(t)$ сила со стороны изогнутого куска цепи: . Направление силы — по касательной к линии цепи в точке ее приложения.

Размер, а значит и масса свисающего и еще лежащего на столе куска цепи меняются со временем. Поэтому пишем для каждого из этих кусков уравнение Ньютона в форме, пригодной для изучения движения с переменной массой (реактивного):

$$m\ddot{x} \mapsto (m\dot{x})^{\boldsymbol{\cdot}} \quad \text{если} \quad m = m(t).$$

Для свисающего куска:

$$(1) \quad \Big(\big(\underbrace{m\frac{x}{L}}_{\text{масса свисающего куска}}\big)\cdot\dot{x}\Big)^{\boldsymbol{\cdot}} = \Big(m\frac{x}{L}\Big)\cdot g - N(t)$$

← проекция на ось $O\vec{x}$ (см. рис)

Для лежащего куска:

$$(2) \quad \Big(\big(\underbrace{m\frac{L-x}{L}}_{\text{масса лежащего куска}}\big)\cdot\dot{x}\Big)^{\boldsymbol{\cdot}} = N(t)$$

← проекция на ось $O\vec{y}$ (см. рис)

Мы учли, что для нерастяжимой нити есть связь между движениями концов свисающей и лежащей на столе нити:

$$\dot{x}(t) = \big(x_{\text{свис.}}(t)\big)^{\boldsymbol{\cdot}}_{(\text{по оси } O\vec{x})} = \big(x_{\text{лежащ}}(t)\big)^{\boldsymbol{\cdot}}_{(\text{по оси } O\vec{y})}$$

Исключая из (1) и (2) $N(t)$, получаем

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{g}{L}x}$$

С начальными условиями $x(0) = \varepsilon$, $\dot{x}(0) = 0$

решение:

$$\boxed{x(t) = \varepsilon \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right)}$$

В момент времени T, когда

$$x(T) = L = \varepsilon \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, T\right)$$

скорость конца нити

$$\dot{x}(t)\Big|_{t=T} = \varepsilon \sqrt{\frac{g}{L}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, T\right) =$$

$$= \varepsilon \sqrt{\frac{g}{L}} \left(\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^2 - 1\right)^{1/2}$$

При малом свисающем конце нити $\varepsilon \to 0$

$$\boxed{\dot{x}(T) \overset{\varepsilon \to 0}{=} \sqrt{gL}} \leftarrow$$

Это ответ на вопрос задачи.