

Семинар 1.

Этом домашнее задание состоит из задач, связанных с конструкцией Штейнера невырожденной квадрики в \mathbb{P}^3 . Для формулировки задач напомним необходимые обозначения, которые были введены на семинаре.

В пространстве \mathbb{P}^3 фиксированы две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 и рассматриваются пучки плоскостей \check{l}_1 и \check{l}_2 , проходящих через эти прямые. Как мы знаем из обсуждения на семинаре, плоскости этих пучков соответствуют точкам прямых \check{l}_1 и \check{l}_2 в двойственном проективном пространстве $\check{\mathbb{P}}^3$. Зафиксируем проективное отображение $f : \check{l}_1 \xrightarrow{\sim} \check{l}_2$. Невырожденная квадратика по Штейнеру Q определяется как множество точек в \mathbb{P}^3 , образуемое прямыми $\pi \cap f(\pi)$ пересечения пар соответственных плоскостей $\pi \in \check{l}_1$ и $f(\pi) \in \check{l}_2$ в пучках, то есть $Q = \bigcup_{\pi \in \check{l}_1} (\pi \cap f(\pi))$.

Мы установили на семинаре, что эта конструкция квадрики Q равносильна следующей. Рассмотрим проективные отображения между прямыми $g_1 : \check{l}_1 \xrightarrow{\sim} l_2$, $\pi \mapsto \pi \cap l_2$ и $g_2 : \check{l}_2 \xrightarrow{\sim} l_1$, $\rho \mapsto \rho \cap l_1$, и композицию $\Phi = g_2 \circ f \circ g_1^{-1} : l_2 \xrightarrow{\sim} l_1$. Тогда квадратика Q получается как множество прямых $l(x) := \langle x, \Phi(x) \rangle$, соединяющих точки x прямой l_2 с точками $\Phi(x)$ прямой l_1 : $Q = \bigcup_{x \in l_2} l(x)$.

Задача 1. 1) Докажите, что для любых двух различных точек $x, x' \in l_2$ прямые $l(x)$ и $l(x')$ не пересекаются.

2) Зафиксируем три различные точки x_0, x_1, x_2 на прямой l_2 . На прямой $l(x_0)$ возьмем произвольную точку y_0 , отличную от x_0 и $\Phi(x_0)$. Через точку x_0 проходит единственная прямая, обозначаемая через m_{y_0} , пересекающая прямые $l(x_1)$ и $l(x_2)$. Докажите, что прямая m_{y_0} пересекает прямую $l(x)$ для любой точки $x \in l_2$.

Следствие. В предыдущих обозначениях получаем, что m_{y_0} лежит на Q для любой точки $y_0 \in l(x_0)$, а тем самым, $Q = \bigcup_{y_0 \in l(x_0)} m_{y_0}$ (вторая конструкция квадрики Штейнера).

Задача 2. Докажите, что если прямая l в \mathbb{P}^3 имеет с квадратикой Штейнера Q по крайней мере три различные точки пересечения, то она лежит на Q . Выведите отсюда, что степень квадрики Q равна 2. (Под степенью квадрики Q понимается степень неприводимого однородного многочлена F от проективных координат x_0, x_1, x_2, x_3 в \mathbb{P}^3 , где Q задается уравнением $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$.)

Задача 3. Напишите уравнение $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ квадрики Q в \mathbb{P}^3 , пользуясь уравнениями пучков плоскостей \check{l}_1 и \check{l}_2 .

Задача 4. В условиях предыдущей задачи докажите, что квадратичная форма $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ невырождена.