

Ход лучей в среде с переменным коэффициентом преломления

1. Пусть прямая $\{y = 0\}$ разделяет среды с разным постоянным коэффициентом преломления и точки A, B находятся по разные стороны от неё. Докажите, что кратчайший по времени путь, по которому свет может пройти между этими точками, — двухзвенная ломаная с узлом на отрезке между проекциями точек A, B на $\{y = 0\}$ и углы наклона её звеньев отвечают закону Снеллиуса $\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2}$. Докажите, что закон Снеллиуса задает единственную точку пересечения границы раздела сред.
2. Для уравнения хода лучей $y' = \pm \frac{1}{k} \sqrt{n^2(y) - k^2}$, где $k = n(y_0) \sin \alpha_0$ — параметр, исследуйте вопрос о единственности решений: докажите, что если $n'(y_0) = 0$ (т.е. если y_0 — критическая точка для $n(y)$), то в точках постоянного решения $y \equiv y_0$ единственность не нарушается, а если $n'(y_0) \neq 0$, то единственность нарушается.
3. Пусть $n'(y_0) < 0$ и точки A, B расположены ниже прямой $\{y = y_0\}$. Докажите, что решение уравнения хода лучей, которое идет из A до прямой $\{y = y_0\}$, проходит по этой прямой горизонтальный отрезок, а затем отрывается от нее и идет в B , не соответствует принципу Ферма: есть путь с меньшим временем прохождения. Подсказка: рассмотрите горизонтальный участок прямой и построенную на нем как на основании трапецию, отложенную в сторону с большей скоростью света, и подберите параметры трапеции так, чтобы путь по трем ее сторонам был быстрее, чем по основанию).
4. Найдите решения уравнения хода лучей в случае $n(y) = \frac{1}{y}$ ($y > 0$) и опишите траектории, по которым в этом случае распространяется свет (некоторые решения надо выкинуть, а некоторые траектории — добавить). Полученные траектории — это в точности геодезические в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости для геометрии Лобачевского.
5. Решите задачу 3.5.14b (с. 118) из учебника: нарисуйте ход лучей на плоскости с зависящим от y показателем преломления $n(y)$, заданным графиком. Есть ли точки, которые соединяются двумя разными траекториями?

Уравнения Ньютона и законы Кеплера

6. Вспомните, как искать фазовые кривые на плоскости (x, \dot{x}) для одномерного уравнения Ньютона $\ddot{x} = f(x)$. Нарисуйте фазовые кривые для уравнения $\ddot{x} = x^2 - 1$.
7. Нарисуйте фазовые кривые уравнения Ньютона в случае, когда потенциал задан графиком — задача 4.20 из учебника.
8. Пусть тело движется в центральном поле сил, в котором сила направлена к центру и убывает пропорционально кубу расстояния до него: $|F(r)| = k/r^3$. Есть ли в этом случае ограниченные в будущем траектории? Есть ли периодические траектории? (Предполагается решение через эскизы траекторий уравнения Ньютона с эффективным потенциалом, без использования предложения Клеро.)