Механика 2023

Домашнее задание № 2

Срок сдачи задания: до конца дня **13.02.23**

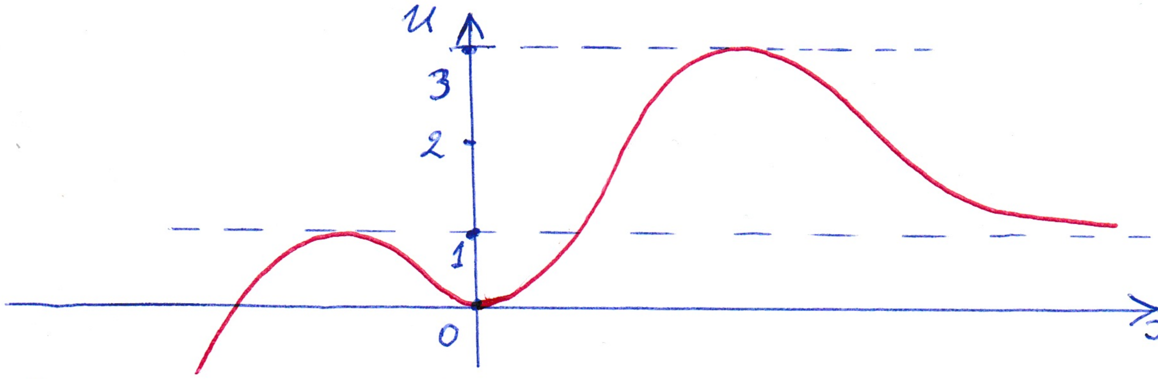
Фазовые портреты в задачах 1-3 должны содержать все особые точки системы (точки равновесия), сепаратрисы, характерные фазовые кривые для всех областей фазового пространства. На фазовых кривых стрелками должно быть обозначено направление движения системы.

1. Нарисуйте фазовый портрет одномерной массивной частицы, находящейся в силовом поле, задаваемом потенциалом Морса[1]:

$$U(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}.$$

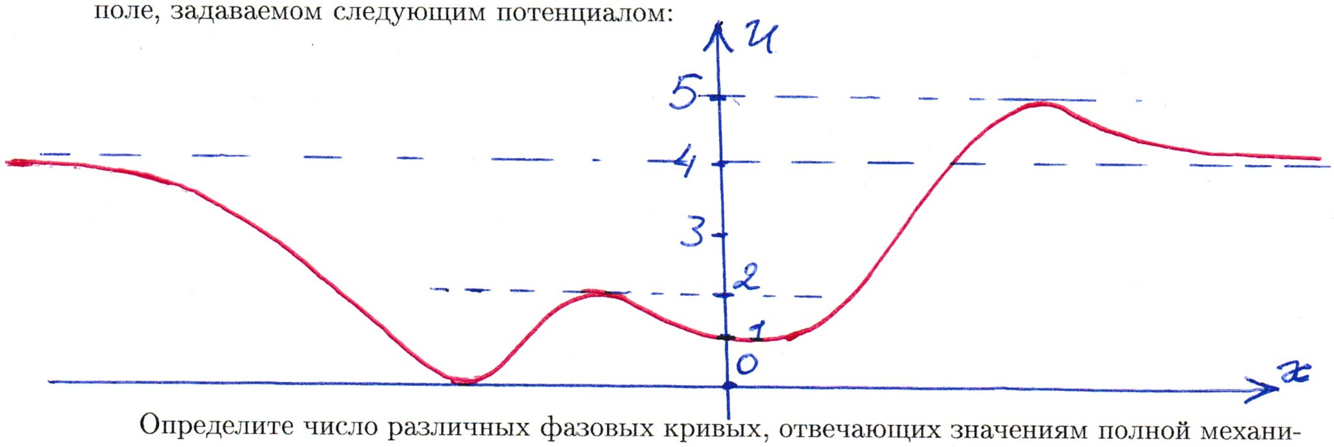
Портрет должен содержать все особые точки, сепаратрисы, фазовые кривые во всех типичных областях энергии. На фазовых кривых должны быть расставлены стрелки направления движения.

2. Нарисуйте фазовый портрет одномерной массивной частицы, находящейся в силовом поле, задаваемом следующим потенциалом:



Определите число различных фазовых кривых, отвечающих значениям полной механической энергии системы $E = 0, 1, 2, 3$.

3. Нарисуйте фазовый портрет одномерной массивной частицы, находящейся в силовом поле, задаваемом следующим потенциалом:



Определите число различных фазовых кривых, отвечающих значениям полной механической энергии системы $E = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

[1]Исторически потенциал Морса использовался для приближенного описания колебания атомов в 2-атомных молекулах.

4. Пользуясь законом сохранения энергии одномерной частицы: $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \mathrm{const}$ при движении в поле с потенциалом $U(x)$, ее уравнение движения можно представить в виде дифференциального уравнения первого порядка: $\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}$.

Интегрируя это уравнение, докажите, что время движения по *сепаратрисе* из любого допустимого начального положения до точки неустойчивого равновесия бесконечно велико. Иными словами, докажите, что двигаясь по сепаратрисе, частица никогда не достигнет положения неустойчивого равновесия.

5.[2] Пусть $S(E)$ — площадь фигуры ограниченной *замкнутой* фазовой кривой, соответствующей движению частицы массы m с энергией E. Докажите, что период T движения частицы по этой фазовой кривой

$$T = m\frac{dS}{dE}.$$

6. Частица движется в пространстве $\mathbb{R}^3$ под действием силы $\vec{F}$. Компоненты силы в декартовой системе координат имеют вид:

$$F_x = yz - x, \qquad F_y = xz - \alpha y, \qquad F_z = \alpha xy + z.$$

Здесь α — вещественный параметр, а (x, y, z) - координаты частицы.

а) Найдите значения параметра α, при которых сила $\vec{F}$ потенциальна и определите соответствующий потенциал $U(x, y, z)$.

б) При произвольных значениях α найдите работу силы $\vec{F}$ при перемещении частицы вдоль кривых γ_1 и γ_2, где:

  (*) γ_1 представляет собой дугу окружности $x^2+y^2 = 1$, $z = 0$, заключенную между точками $M_1(1, 0, 0)$ и $M_2(0, 1, 0)$.

  (**) γ_2 представляет собой отрезок винтовой линии $x^2+y^2 = 1$, $z = 2\phi/\pi$, заключенный между точками $M_1(1, 0, 0)$ и $M_2(0, 1, 1)$, где $\operatorname{tg}\phi = y/x$ — полярный угол в плоскости xOy.

7. Двигающаяся в плоскости частица соединена с началом координат $(0, 0)$ с помощью невесомой пружины. Сила упругости пружины имеет вид

$$\vec{F} = -\kappa\rho\,\vec{e}_\rho, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

здесь $\vec{e}_\rho$ — орт полярной системы координат, (x, y) – декартовы координаты частицы, $\kappa > 0$ – коэффициент упругости пружины. Найдите работу силы упругости при перемещении частицы из точки с абсциссой $x = 0$ в точку с ординатой $y = 0$ вдоль кривой $y = \frac{x^2-\alpha^2}{2}$.

8. На тренировке спортсмен пробегает круг радиуса R с постоянной по величине скоростью v. В момент старта навстречу спортсмену начинает дуть непрерывно усиливающийся ветер. Направление ветра с течением времени не изменяется, а его скорость меняется по закону $V = at^2$, где $a > 0$ — константа, t — время, прошедшее с момента старта. Сила сопротивления воздуха, действующая на спортсмена, равна

$$\vec{F} = -\kappa\,\vec{u},$$

[2] Задача взята из §4 книги В.И.Арнольда “Математические методы классической механики”.

где $\vec{u}$ — скорость бегуна относительно воздуха. С какой скоростью v спортсмен должен бежать круг, чтобы его работа по преодолению сопротивления воздуха была минимальна? (Считайте, что работа спортсмена равна по величине и противоположна по знаку работе силы сопротивления воздуха.)

9. Бусинка массы m скользит без трения вдоль прямого стержня, равномерно вращающегося в плоскости вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью ω (см. пример 2 семинара 3). В начальный момент бусинка находится на расстоянии $\rho(0) = a$ от начала координат, ее начальная радиальная скорость равна нулю: $\dot{\rho}(0) = 0$. На бусинку действует только сила реакции стержня $\vec{N}$, направленная вдоль орта $\vec{e}_\phi$ полярной системы координат.

- Найдите зависимость величины силы реакции стержня $N(t)$ от времени и определите работу, совершенную этой силой над бусинкой к моменту времени $T > 0$.

- Вычислите изменение кинетической энергии бусинки за тот же промежуток времени T и сравните его с работой силы $\vec{N}$.