

## Классическая теория поля 2023

### Листок 1. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Срок сдачи: до конца дня **21 февраля 2023**

1. Тележка катится по столу с постоянной скоростью  $v$ . По тележке в том же направлении катится вторая тележка со скоростью  $v$  относительно первой. По второй тележке катится третья с той же скоростью  $v$  относительно второй и так далее. Определите скорость  $n$ -й тележки относительно стола.

2. Зеркало движется перпендикулярно своей плоскости с постоянной скоростью  $v$  относительно источника света. В системе покоя источника света падающий луч направлен под углом  $\theta$  к нормали зеркала.

- Какой угол с плоскостью зеркала в этой системе образует отраженный луч света?
- Как изменяется в той же системе отсчета энергия луча при отражении?

**Подсказка:** для ответа на этот вопрос удобно использовать связь энергии и 3-импульса свободной релятивистской частицы, известную под названием *дисперсионное соотношение*.

- Как изменится ответ на вопрос пункта а), если зеркало движется не перпендикулярно, а параллельно своей плоскости?

3.  **$\beta$ -распад.** Покоящийся нейтрон претерпевает так называемый  $\beta$ -распад, одним из продуктов которого является электрон. В системе покоя нейтрона направления вылета электрона равновероятны, а модуль его 3-импульса равен  $P = |\vec{p}|$ . В эксперименте наблюдают  $\beta$ -распад нейтронов, которые движется относительно лаборатории со скоростью  $V$  вдоль оси  $Ox$  лабораторной системы отсчета.

- Каково геометрическое место концов вектора импульса  $\vec{p}$  электронов распада в лабораторной системе отсчета?
- При каком соотношении  $P$  и  $V$  наблюдатель в лабораторной системе не будет регистрировать вылета электронов под некоторыми углами относительно направления полета нейтронов?

4. **Явление комптоновского рассеяния.** Фотон частоты  $\nu$  налетает на покоящийся электрон массы  $m$  и после столкновения движется под углом  $\theta$  к направлению своего исходного импульса. Покажите, что частота  $\nu'$  рассеянного фотона выражается формулой:

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2}(1 - \cos \theta),$$

где  $c$  – скорость света, а  $h$  – постоянная Планка, которая связывает энергию фотона  $E$  с его частотой квантовомеханической формулой  $E = h\nu$ .

5. Сопутствующей называется инерциальная система отсчета, в которой в данный момент времени частица покоится в начале координат. При неравномерном (несвободном) движении частицы сопутствующие системы все время меняются. В релятивистской механике равноускоренным называется движение частицы, которая в каждый момент времени испытывает постоянное 3-ускорение в сопутствующей системе отсчета.

В начальный момент времени ракета, покоящаяся в лабораторной системе отсчета (связанной с Землей), начинает движение с постоянным (для пассажиров ракеты) 3-ускорением  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Цель экспедиции, отправляющейся на ракете, — посетить другой край нашей Галактики (наша Галактика называется Млечный Путь, ее поперечные размеры примерно 100 000 световых лет или  $d = 10^{21}$  метров). Режим полета ракеты: половину пути до края галактики — движение с постоянным 3-ускорением  $g$ , затем вторую половину пути — торможение с тем же ускорением. Достигнув цели полета ракета сразу отправляется в обратный путь к Земле в таком же режиме. Ответьте на следующие вопросы:

- а) Сколько времени по часам путешественников займет полет до цели и какова будет длительность всей экспедиции? Хватит ли на это жизни одного поколения космонавтов (порядка 60 лет)?
- б) Сколько времени пройдет на Земле от старта до возвращения экспедиции?
- в) Оцените разность  $\Delta v = c - v_{max}$  между максимальной скоростью ракеты  $v_{max}$ , достигнутой в полете, и скоростью света  $c = 299\,792\,458 \text{ м/с}$ .
- г) Какова будет длина корпуса ракеты с точки зрения земного наблюдателя в момент достижения ракетой максимальной скорости? Длина ракеты на Земле перед стартом составляла 1000 метров.

**6.** Линейный базис в алгебре Ли группы Лоренца задается шестью инфинитезимальными поворотами  $L^{\mu\nu}$ ,  $0 \leq \mu < \nu \leq 3$ , затрагивающими две из четырех координат пространства Минковского:  $x^\mu$  и  $x^\nu$ . Алгебра Ли группы Пуанкаре вдобавок к  $L^{\mu\nu}$  имеет еще четыре базисных элемента  $P^\mu$ ,  $0 \leq \mu \leq 3$ , отвечающих трансляциям вдоль координатных осей  $x^\mu$ .

- а) Найдите явный вид матриц  $L^{\mu\nu}$  и выразите коммутаторы  $[L^{\mu\nu}, L^{\rho\sigma}]$  в виде линейных комбинаций матриц  $L$ .
- б) Найдите коммутаторы элементов  $L^{\mu\nu}$  и  $P^\rho$ .