Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений, весна 2023г.

Семинар 3

Уравнения Ньютона и законы Кеплера (продолжение)

1. Для центральной силы с потенциалом $U(r) = -\frac{k}{r}$ (силы притяжения), напишите эффективную потенциальную энергию при фиксированном моменте импульса и, перейдя при помощи предложения Клеро к уравнению на $\rho = 1/r$, найдите уравнения фазовых кривых в полярной системе координат (должны получиться эллипсы, параболы и гиперболы).

2. Решите (самостоятельно) ту же задачу для потенциала $U(r) = \frac{-k}{2r^2}$.

3. Пример Ситникова. Два точечных тела равной массы вращаются по единичной окружности в плоскости Oxy, находясь всегда в диаметрально противоположных точках. Третье тело пренебрежимо малой массы движется по оси Oz под действием притяжения первых двух тел. Напишите уравнение Ньютона для движения третьего тела, нарисуйте график потенциальной энергии и фазовый портрет на плоскости $(z, \dot{z})$. Обратите внимание на наличие как периодических, так и уходящих на бесконечность траекторий.

Это «детский» пример Ситникова, а настоящий пример получается его модификацией. Пусть два тела движутся вокруг центра масс не по общей окружности, а по двум эллипсам, находясь в симметричных относительно центра масс точках. Если при пролете третьего тела через начало координат расстояние между первыми двумя телами возрастает от наименьшего к наибольшему, третье тело разгоняется (в симметричных относительно нуля точках оси Oz на тело действуют разные по модулю силы, так как после пролета нуля два массивных тела разошлись на большее расстояние). По непрерывной зависимости от начального условия, отпуская третье тело с фиксированной скоростью из разных точек вертикальной оси, можно добиться как ускорения, так и торможения при пролете через ноль. Можно выбрать начальные условия таким образом, что после первого пролета тело остановится как раз в такой точке, чтобы при втором пролете тоже быть разогнаным, и т.д. Так можно добиться колебаний третьего тела с возрастающей к бесконечности амплитудой (или более сложных движений) — это и есть настоящий пример Ситникова. См. книгу В.М. Алексеева «Лекции по небесной механике», в которой приводится также статья К. Ситникова.

4. Камень с нулевой начальной скоростью падает на солнце с расстояния, равного радиусу орбиты Земли. За какое время он долетит до солнца?

Уравнения Эйлера–Лагранжа для задачи о ходе лучей

5. Выведите из уравнения первого интеграла уравнения Эйлера-Лагранжа для лагранжиана $L(q, p) = n(q)\sqrt{1+p^2}$ из задачи о ходе лучей дифференциальное уравнение хода лучей (которое обсуждалось на предыдущих семинарах).

6. Напишите уравнение Эйлера-Лагранжа для лагранжиана $L(y, y') = n(y)\sqrt{1+(y')^2}$. Какие постоянные решения $y = const$ ему удовлетворяют? Докажите, что функция $y(x) = y_0$ локально минимизирует соответствующее действие $\int_{x_0}^{x_1} n(y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ (при условии $y(x_0) = y(x_1) = y_0$), если y_0 — точка минимума показателя преломления $n(y)$.