Группы, Алгебры, Представления — Напоминание

G — группа конечная

A — конечномерн. алгебр над алг. замкнутым полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$)

V — лин. пространство над $\mathbb{K}$

Группа $\mathrm{Aut}(V)$ — обратимые преобр V $\longleftrightarrow$ Выбран базис в V обратим. матрицы

Алгебра $\mathrm{End}(V)$ — лин. преобр. V $\longleftrightarrow$ $\forall$ матрица

Представление ρ_V гр. G (алг. A) на пространстве V — гомоморфизм

$$G\ (A) \xrightarrow{\rho_V} \mathrm{Aut}\,V\ (\mathrm{End}\,V)$$

$$\forall a, b \in A \qquad \boxed{\rho_V(a \cdot b) = \rho_V(a) \cdot \rho_V(b)}$$

лин. структура тоже сохраняется при ρ_V

Изоморфные представления $\rho_V \cong \rho_{V'}$

$\mathrm{Hom}_A(V, V')$: $\quad V \xrightarrow{\varphi} V'$ $\quad \varphi$ — обратимо

и диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_V(a)"'] & V' \arrow[d, "\rho_{V'}(a)"] \\ V \arrow[r, "\varphi"] & V' \end{tikzcd}$$

коммутативна $\forall a \in A$

Эквивалентная формулировка: $\quad \boxed{\varphi(\rho_V(a)v) = \rho_{V'}(a)(\varphi(v))} \quad \forall v \in V \quad \forall a \in A$

Если выбран базис в V:

$\rho_V(a) \longmapsto \Lambda_a \leftarrow$ матрицы.

$\varphi \longmapsto \Phi$

$\rho_{V'}(a) \longmapsto \Phi \Lambda_a \Phi^{-1}$

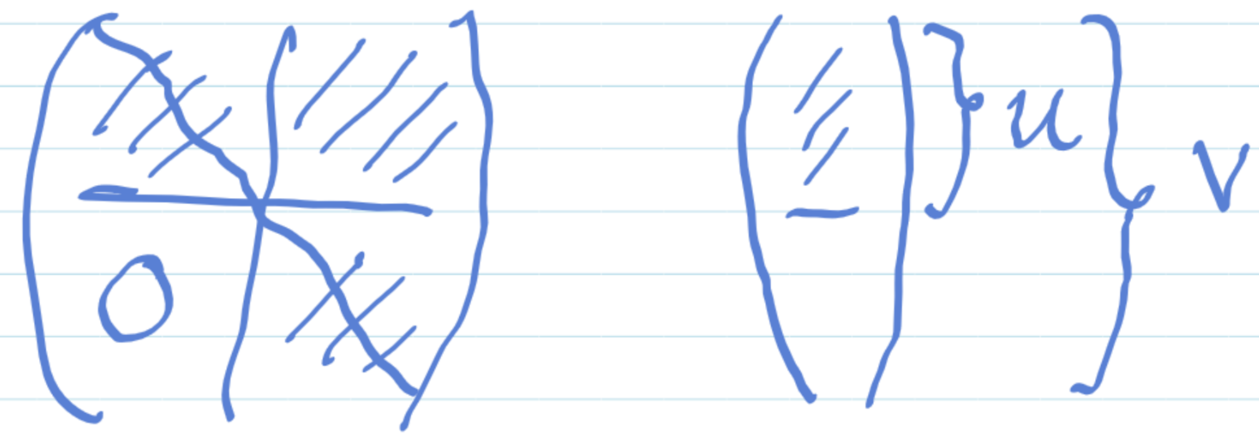
Подпредставление ρ_U в ρ_V:

$$U \subset V$$

$$\forall a \in A \qquad \rho_U(a)\, U \subset U$$ — A-инвариантное подпространство

Если выбран базис в V, согласованный с U

$$a \in A \longmapsto \Lambda_a =$$



Неприводимое представление $\Longleftrightarrow$ нет нетривиальных подпредставлений

Критерии неприводимости:

а) $\forall v \in V$ — циклический, т.е.

$$\forall a \in A \qquad \rho_V(a)\cdot v = V$$

б) $A \xrightarrow{\rho} \mathrm{End}\, V$ — эпиморфизм

$$\mathrm{Im}\, \rho_V = \mathrm{End}\, V$$

Выберем в V базис $\{v_i\}_{i=1\dots n}$ $\quad \dim V = n$

$$\mathrm{End}\, V \cong \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$$

Базис матричных единиц в $\mathrm{End}(V)$:

$$E_{ij} = \begin{array}{c c} & j \\ i & \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \quad \\ 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \qquad v_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Vec_n $\qquad E_{ij}\, v_k = \delta_{jk}\, v_i \qquad (*)$

Mat_n $\qquad E_{ij}\, E_{kl} = \delta_{jk}\, E_{il} \qquad \dim \mathrm{Mat}_n = n^2$

Утв.: $\boxed{\exists!\ \text{нетривиальное неприводимое представление } \mathrm{Mat}_n. \text{ Это } \mathrm{Vec}_n\ (*).}$

Mat_n — простая алгебра

Def A — простая, если $\forall a \neq 0$ $\underbrace{AaA}_{\text{двусторонний идеал}} = A$

Т.е. в A $\nexists$ нетривиальных двусторонних идеалов.

Утв: $\forall$ простая алг. A над алг. замкнутым полем $\mathbb{K}$ изоморфна $Mat_n(\mathbb{K})$ при некотором значении n.

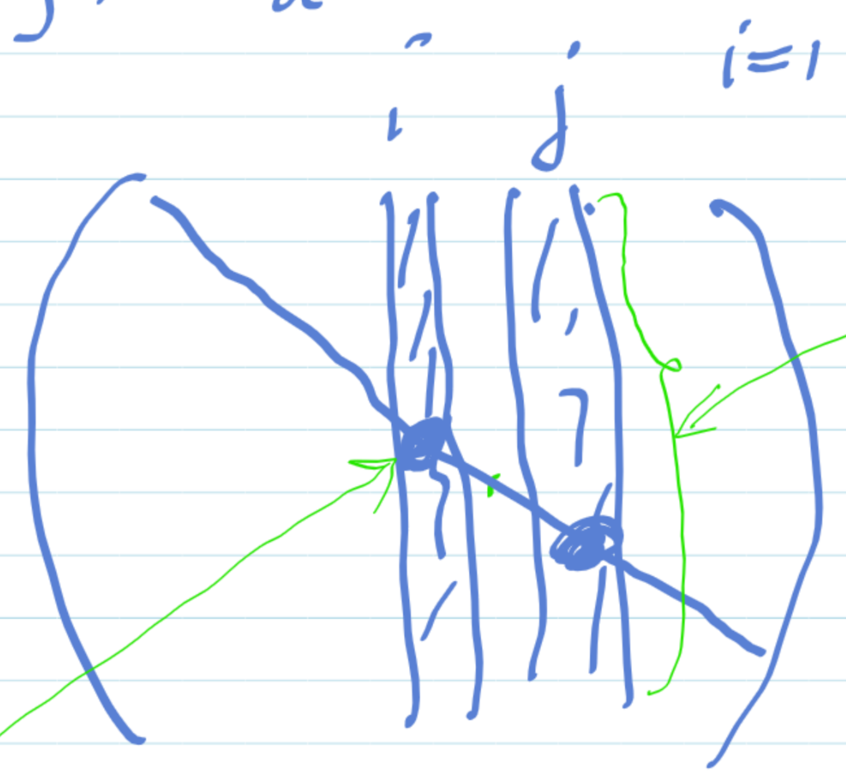
Def регулярное представление ρ_A:

$$\boxed{\rho_A(a)\cdot\vec{b} = \overrightarrow{a\cdot b}}$$ ← умножение слева в A.

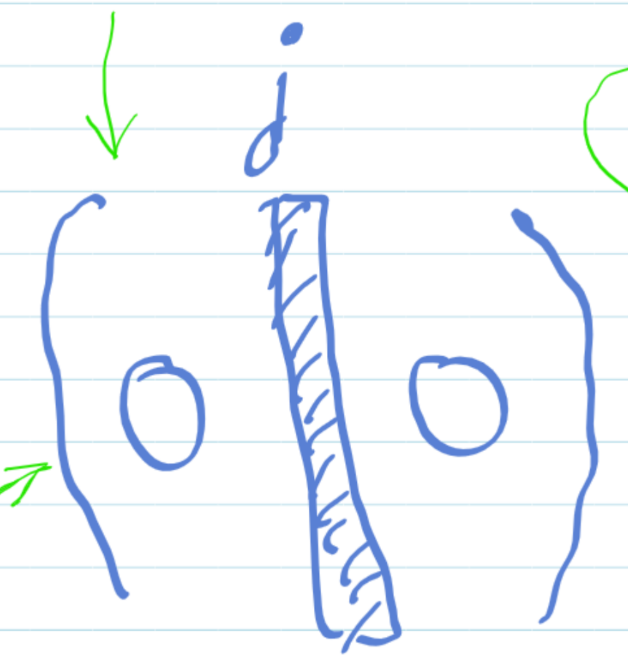
Обозначаем: $V = A$, $\vec{a} \in V$, $a \in A$, $\vec{a} \leftrightarrow a$

$$\rho_{Mat_n} = \bigoplus_{i=1}^{n} Vec_n^{(i)}$$

$$Vec_n^{(j)} = Span(\underbrace{E_{kj}}_{v_k}\ \forall k)$$



j-й столбец — инвариантное подпространство $\rho_{Mat_n} - Vec_n^{(j)}$



E_{ii} — диагональная матричная единица — идемпотент

$$\begin{cases} E_{ii}^2 = E_{ii} \\ E_{ii}E_{kk} = \delta_{ik}E_{kk} \end{cases}$$

$\{E_{ii}\}_{1\le i\le n}$ — полный набор взаимно ортогональных примитивных идемпотентов

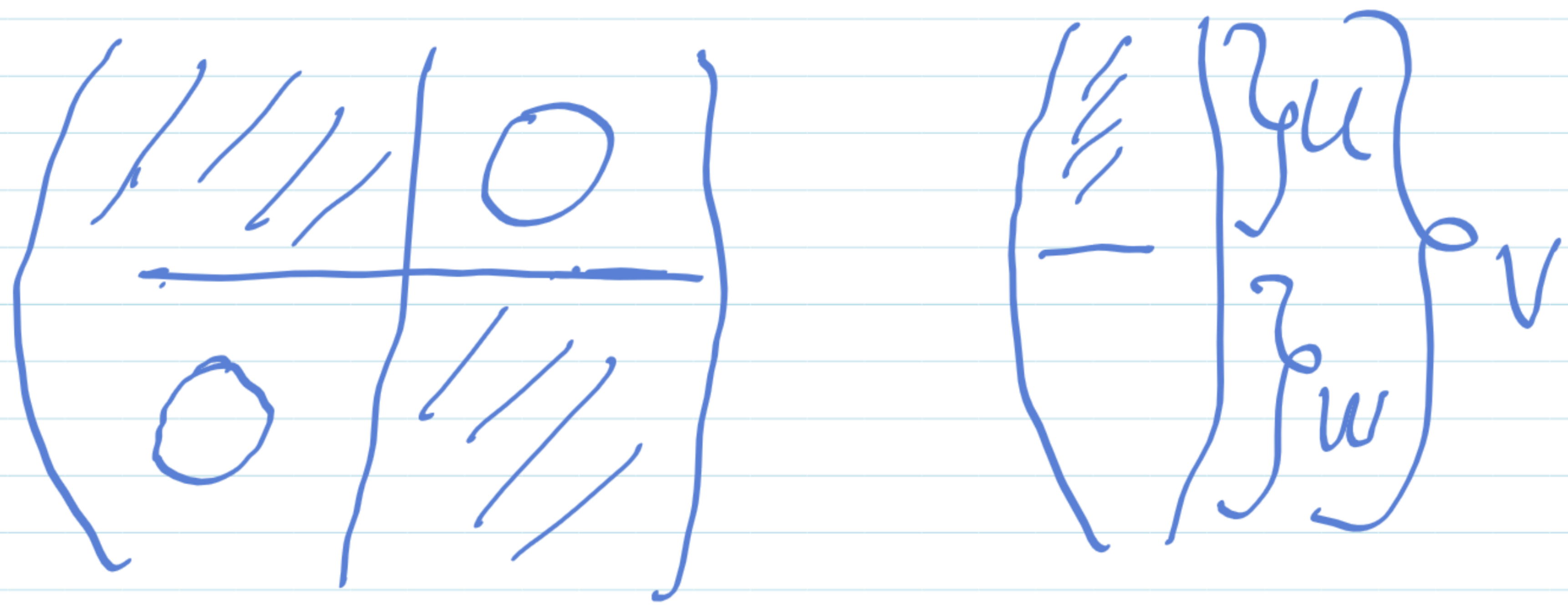
Def. Идемпотент e примитивен, если $\nexists$ e_1, e_2:

$$e = e_1 + e_2,\quad e_1^2 = e_1,\quad e_2^2 = e_2,\quad e_1e_2 = e_2e_1 = 0$$

Def: Набор $\{e_i\}$ примитивных взаимно ортогональных идемпотентов полон в A, если

$$\boxed{\mathbb{1}_A = \sum_i e_i}$$ ← пирсовское разложение единицы в A.

Приводимое представление V разложимо, если $V = U \oplus W$:



Представление ρ_V вполне приводимо, если $V = \bigoplus_i V_i$, где ρ_{V_i} — неприводимы.

Теорема Машке (1898)

$\forall$ представление G над $\mathbb{K}$: $\operatorname{char} \mathbb{K}$ не делит $|G|$ вполне приводимо

$\Downarrow$

Def. Групповая алгебра $\mathbb{K}[G]$: $\ni a = \sum_{i=1}^{|G|} \alpha_i g_i$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $g_i \in G$

$$a \cdot b = \Big(\sum_i \alpha_i g_i\Big)\Big(\sum_j \beta_j g_j\Big) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (g_i \cdot g_j).$$

Теорема Машке в применении к $\mathbb{K}[G]$:

$$\boxed{\mathbb{K}[G] \text{ — полупроста}}$$

Def: A — полупроста, если ее радикал — $\operatorname{rad} A = 0$.

$\operatorname{rad} A$ — двусторонний идеал в A, состоящий из существенно нильпотентных элементов x:

$$\underbrace{A x A x A \ldots x A}_{\text{количество эл-тов } x \text{ конечно.}} = 0$$

Для $\forall$ неприводимого представления ρ_V алг. A $\operatorname{rad} A \subset \operatorname{Ker} \rho_V$,

Фактор-алгебра $A / \operatorname{Rad} A$ — полупроста

Теорема Веддербёрна – Артина (1907 – 1927) $\mathbb{K}$ – алг. замкнуто

эквивалентн. утверждения

а) A – полупроста ($\mathrm{Rad}\, A = 0$)

$\Updownarrow$

б) $\forall$ представление ρ_V алг. A вполне приводимо

$\Updownarrow$

в) $$\boxed{A \cong Mat_{n_1}(\mathbb{K}) \times Mat_{n_2}(\mathbb{K}) \times \dots \times Mat_{n_k}(\mathbb{K})}$$

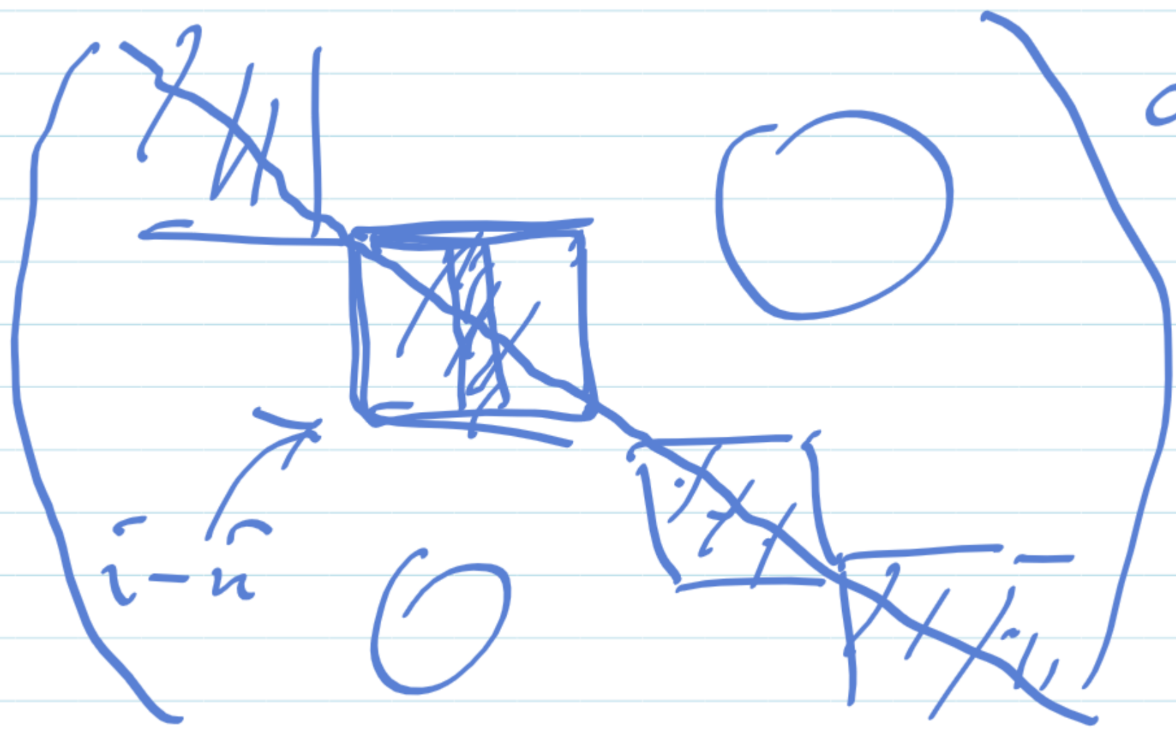
набор $(n_1, n_2 \dots n_k)$ – численные инварианты A

$\Updownarrow$

г) регулярное предст A

$$\boxed{\rho_A = \bigoplus_{i=1}^{k} n_i \cdot Vec_{n_i}(\mathbb{K})}$$

полупростая A <=>



алгебра блочно-диагональных матриц.

Следствие

$$\boxed{\dim A = \dim \rho_A = \sum_i n_i^2}$$

размерности всех неэквивалентных неприводимых представлений A.

Неприводимые представления характеризуются леммой Шура (1905)

Пусть U и V – пр-ства неприводимых представлений ρ_U и ρ_V алгебры A над $\mathbb{K}$

$$\rho_U \not\cong \rho_V \iff \mathrm{Hom}_A(U, V) = 0$$

Если $\mathbb{K}$ алг. замкнуто: $\boxed{\mathrm{Hom}_A(V, V) = \mathbb{K} \cdot \mathrm{Id}_V}$

$\Downarrow$ Следствие

$$\forall a \in \underbrace{Z(A)}_{\text{центр } A} \quad \underbrace{\rho_V}_{\text{неприводимое}}(a) = \underbrace{c_a}_{\text{числа, характеризующие представление } \rho_V} \mathrm{Id}_V$$

Симметрическая группа S_n (напоминание)

<u>Def</u>: порождается σ_i, $i=1\dots n-1$ $\qquad \sigma_i = |\,..\,|\overset{i\ \ i+1}{\times}|\,..\,|$

$$\begin{cases} \sigma_i^2=1, \quad (\sigma_i\sigma_j)^2=1 \quad |i-j|>1 \\ (\sigma_i\sigma_{i+1})^3=1 \end{cases}$$

$\overset{1}{\circ}$—$\overset{2}{\circ}$—$\circ$ . . . . $\circ$—$\overset{n-1}{\circ}$

$\#$ребр$(i,j)=m_{ij}$: $(\sigma_i\sigma_j)^{m_{ij}+2}=1$

$\# S_n = n!$

$\mathbb{C}[S_n]$ — полупроста

Башня групп/алгебр

$$1=S_1\subset S_2\subset S_3\subset \dots \subset S_i \subset S_{i+1}\subset \dots \subset S_n$$

(добавить еще генератор σ_i + соотн. на него)

С ней связаны 2 процедуры на представлениях:

1) <u>Редукция</u>: $\rho_V^{(S_{i+1})} = \bigoplus_\alpha \rho_{V_\alpha}^{(S_i)}$, $\quad V=\bigoplus_\alpha V_\alpha$

2) <u>Индукция</u>: В общей ситуации $A\supset B$ — подалгебра

U — пространство представления алгебры B: $\rho_U^{(B)}$

$V = \rho_A \otimes_B U$ — пр-ство индуцированного представления $\mathrm{Ind}_B^A \rho_U = \rho_V^{(A)}$

В частном случае, когда $A=S_{i+1}$, $B=S_i$, $\{v_\alpha\}$ — базис в пр-стве U представления S_i — $\rho_U^{(S_i)}$, имеем

$\{v_\alpha, \sigma_i v_\alpha, \sigma_{i-1}\sigma_i v_\alpha, \dots, \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_i v_\alpha\}$ — базис индуцированного представления $\mathrm{Ind}_{S_i}^{S_{i+1}}\rho_U$, причем $\dim V = (i+1)\cdot \dim U$

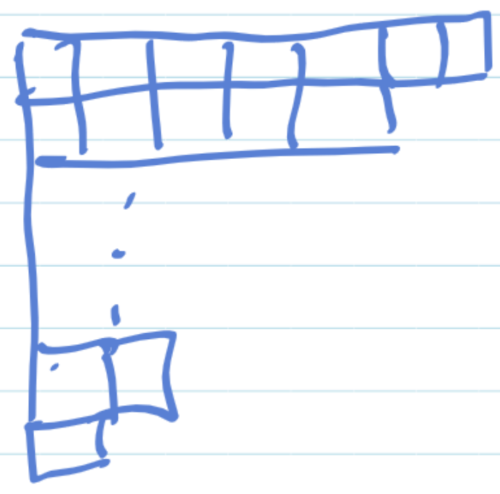
Неприводимые представления S_n нумеруются разбиениями

$V_{\lambda \vdash n}$ $\quad$ $\lambda := (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 0)$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n, \quad \lambda_i \in \mathbb{N}.$$

$\Updownarrow$ диаграмма Юнга

клеток $= \lambda_i$ в ряду i



S_1 $\quad$ $\lambda = (1)$ $\longrightarrow$ $V_{(1)}$ – трив. предст.

S_2 $\quad$ λ: (2) $(1,1)$ $\quad$ $V_{(2)}$ $\quad$ $V_{(1,1)}$ $\quad$ – $\dim = 1$

$\sigma_1 \mapsto 1$ $\quad$ $\sigma_1 \mapsto -1$

S_3: $\quad$ $V^{\text{тождеств}}_{(3)}$ $\quad$ $V^{\text{знакопер}}_{(1,1,1)}$ $\quad$ $V_{(2,1)}$ $\quad$ $\dim = 2$

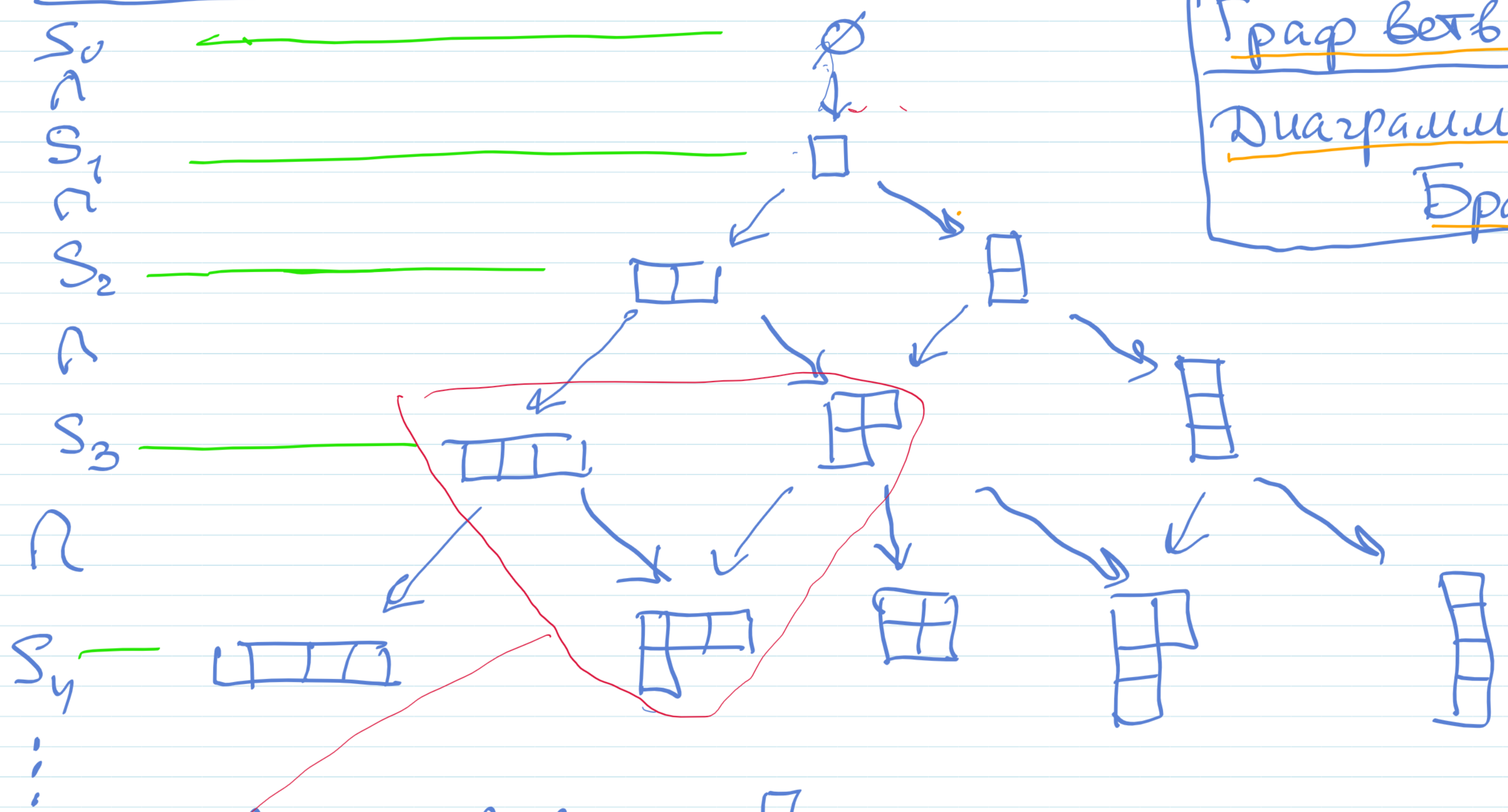
$\sigma_i \mapsto 1$ $\quad$ $\sigma_i \mapsto -1$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 3!$$

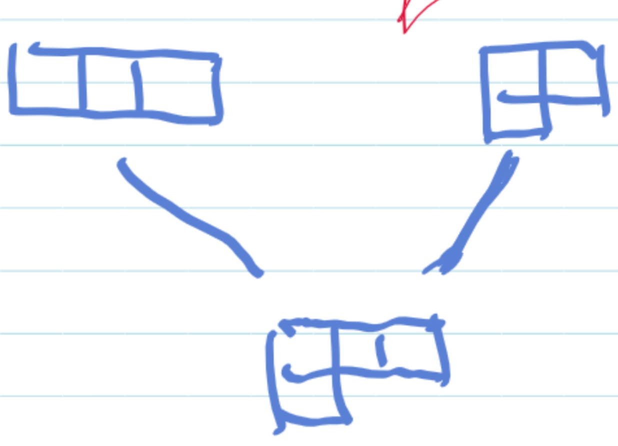
Граф ветвления

или

Диаграмма Братели



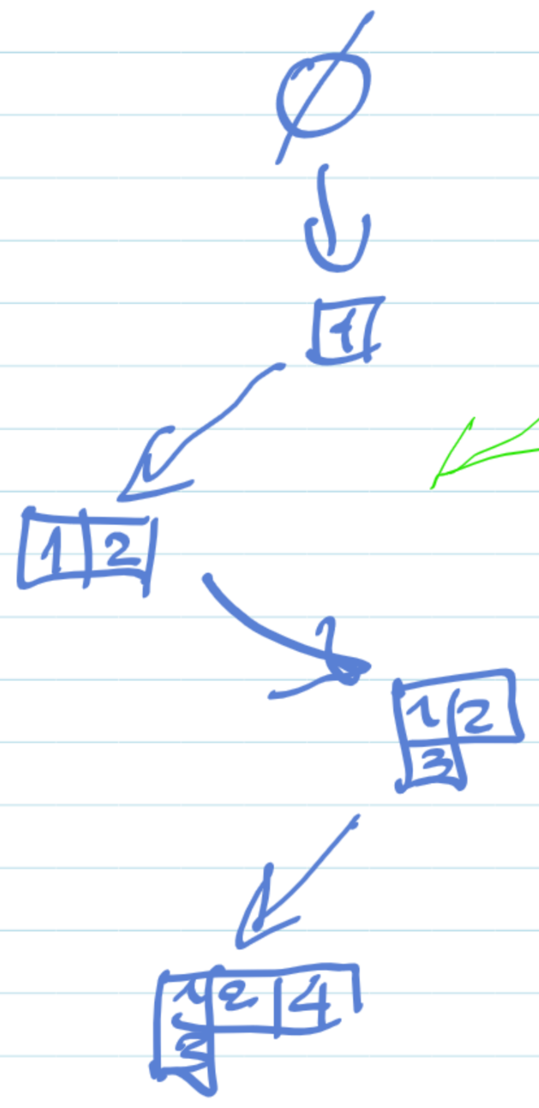
Редукция в графе ветвления. Пример:



: $\quad \mathcal{S}^{S_4}_{(3,1)} = \mathcal{S}^{S_3}_{(3)} \oplus \mathcal{S}^{S_3}_{(2,1)}$ $\Longrightarrow$ формула для размерности представления $\longrightarrow$

$\dim V_\lambda$ = # путей из вершины $\varnothing$ графа ветвления в вершину λ.

путь



Это процедура накидывания нумерованных клеток $\boxed{i}$, $i=1,2,\dots,n$ в квадрант

клетки притягиваются

В $\lambda \vdash n$ помещаем числа $1\dots n$

номера клеток возрастают →

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \leftarrow \text{стандартная таблица Юнга}$$

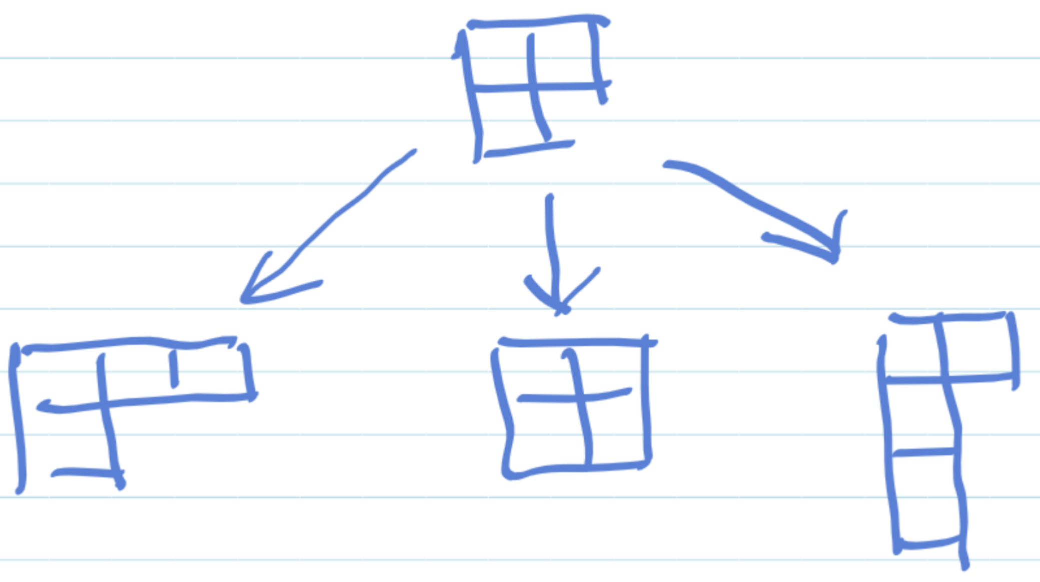
возрастают ↓

$\| \; t_{\alpha,\lambda}$

$$\underbrace{\begin{array}{lll} 1 & 2 & 3 \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{lll} 1 & 2 & 4 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 \end{array}}$$

$V_\lambda \quad \{v_{t_{\alpha,\lambda}}\}$

Индукция представлений. Пример:



$$\mathrm{Ind}_{S_3}^{S_4}\rho_{(2,1)} = \rho_{(3,1)} \oplus \rho_{(2,2)} \oplus \rho_{(2,1,1)}$$

$\dim \rho_{(2,1)} = \dim \rho_{(2,2)} = 2$

$\dim \rho_{(3,1)} = \dim \rho_{(2,1,1)} = 3$

$$4 \cdot \dim \rho_{(2,1)} = \dim \rho_{(3,1)} + \dim \rho_{(2,2)} + \dim \rho_{(2,1,1)}$$

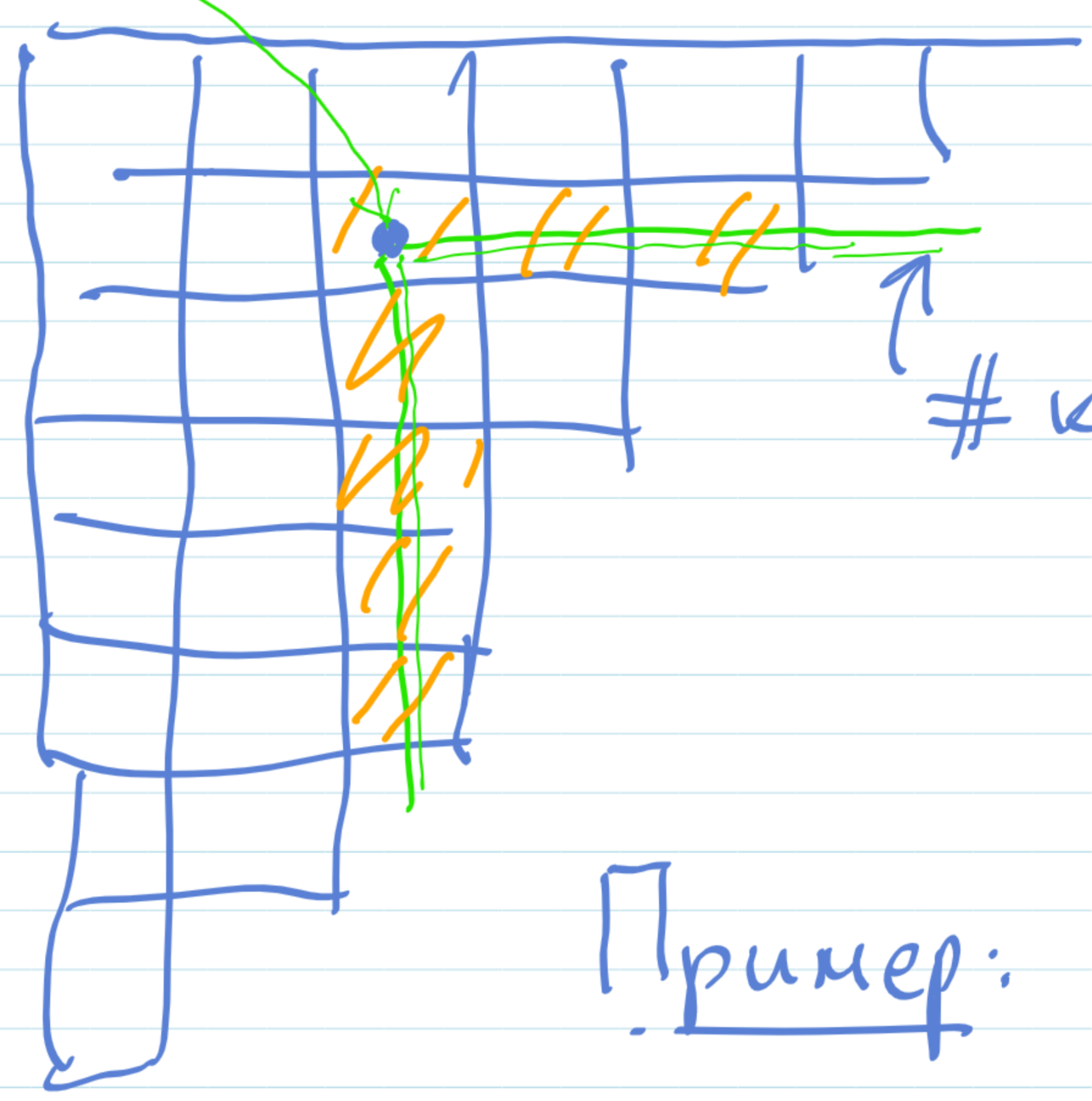
$4 \cdot 2 = 3 + 2 + 3$ — верно!

Формула крюков (hook length formula)

$$\boxed{\dim V_{\lambda\vdash n} = \# t_{\alpha,\lambda\vdash n} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} \ell_{\lambda,i}}}$$

клетка i

диаграмма $\lambda\vdash n$



\# клеток пересекаемых крюком $\ell_{\lambda,i} = 7$

Пример:

$\dim V$  $\vdash 5$ $= \dfrac{5!}{4\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 1} = 5.$

$$\begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & \end{array}$$