Семинар 2.

Всюду $\operatorname{char}\mathbf{k} \neq 2$.

Задача 1. Квадрикой в $\mathbb{P}^3$ называется множество $Q = \{x = (x_0 : \dots : x_3) \in \mathbb{P}^3 \mid F(x) = 0\}$, где $F(x) = F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x_ix_j$ - квадратичная форма. (Здесь матрица (a_{ij}) по определению симметрична.) Квадрика Q (соответственно, квадратичная форма $F(x) = \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x_ix_j$) называется *неырожденной*, если матрица (a_{ij}) невырождена. Дана невырожденная квадрика Q над полем $\mathbf{k} = \overline{\mathbf{k}}$. Является ли она квадрикой по Штейнеру?

Задача 2. Пусть Q - квадрика в $\mathbb{P}^3$ и $a \in Q$. Прямая l через точку a называется *касательной к* квадрике Q в точке a, если $Q \cap l = a$, либо если $a \in Q$. Обозначим через $\mathbb{T}_aQ$ объединение всех прямых к Q, касательных к Q в точке a.
1) Докажите, что $\mathbb{T}_aQ$ - подпространство в $\mathbb{P}^3$. Оно называется *касательным пространством к Q в точке a*.
2) Пусть Q - квадрика Штейнера и $a \in Q$. Покажите, что $\mathbb{T}_aQ$ - плоскость. Как геометрически построить плоскость $\mathbb{T}_aQ$? (*Указание*: опишите пересечение $Q \cap \mathbb{T}_aQ$.)

Задача 3. Зная уравнение $F(x) = 0$ квадрики Q, где $F(x) = F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x_ix_j$ - квадратичная форма (возможно, нулевая), напишите уравнение касательного пространства $\mathbb{T}_aQ$ в точке $a = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3) \in Q$.