

### Семинар 3.

Всюду  $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$ ,  $\text{char } \mathbf{k} \neq 2$ .

В проективном пространстве  $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V)$  дана квадрика  $Q$  с уравнением  $F(x) = 0$ , где  $F(x) = \sum_{i,j=0}^3 a_{ij}x_i x_j$  - квадратичная форма. Для произвольной точки  $a = (a_0 : \dots : a_3) \in \mathbb{P}^3$  мы определили на семинаре поляр  $p_a Q$  точки  $a$  относительно квадрики  $Q$  как подпространство в  $\mathbb{P}^3$ , заданное (линейным по  $x$ ) уравнением

$$\tilde{F}(a, x) := \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} a_i x_j = 0.$$

Здесь билинейная форма  $\tilde{F}(a, x) = \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} a_i x_j$  называется *поляризацией* квадратичной формы  $F$  относительно точки  $a$ .

**Задача 1.** Докажите, что для произвольной точки  $a \in Q$  верно равенство  $p_a Q = \mathbb{T}_a Q$ . (Это равенство должно следовать непосредственно из уравнения для  $\mathbb{T}_a Q$ , полученного в задании к семинару 2.)

**Задача 2.** Пусть  $Q$  - невырожденная квадрика и  $a$  - произвольная точка в  $\mathbb{P}^3$ , не лежащая на  $Q$ . Проведем произвольную плоскость  $\tau$  через точку  $a$  и рассмотрим конику  $C = Q \cap \tau$ . Обозначим через  $p_a Q$  поляр  $p_a Q$  точки  $a$  относительно квадрики  $Q$  и соответственно через  $p_a C$  поляр  $p_a C$  точки  $a$  относительно коники  $C$  в плоскости  $\tau$ . Докажите, что  $p_a Q \cap \tau = p_a C$ .

**Задача 3.** В обозначениях предыдущей задачи рассмотрим конику  $D = p_a Q \cap Q$ . Докажите, что для любой точки  $b \in D$  прямая  $\langle a, b \rangle$  - касательная к  $Q$  в точке  $b$ .

**Задача 4.** В предыдущих обозначениях докажите, что

$$\bigcap_{b \in D} \mathbb{T}_b Q = \langle a \rangle.$$

**Задача 5.** Дана невырожденная квадрика  $Q = \{F = 0\}$  и плоскость  $\tau = \{L = 0\}$ , где  $F$  и  $L$  - невырожденная квадратичная форма и линейная форма соответственно. Рассмотрим пучок квадрик с уравнением

$$\lambda F + \mu L^2 = 0, \quad (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1.$$

Опишите все вырожденные квадрики в этом пучке.