Случайные процессы, случайные матрицы и интегрируемые модели .
Листок 1.

Задача 1. Метод моментов и распределение Марченко-Пастура.

Пусть $X \in \mathbb{R}^{N\times p}$ — прямоугольная матрица, матричные элементы которой есть независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, $\mathbb{E}(X_{ij} = 0)$, единичной дисперсией, $\mathbb{D}(X_{ij}) = 1$ и конечными моментами более высоких степеней, где $N \leq p$. Пусть $R_N = N^{-1}XX^T$ - выборочная коварицонная матрица $N \times N$ с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Введем эмпирическую спектральную меру

$$L_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i}.$$

а) Докажите, что в пределе $N \to \infty, p/N = c \geq 1$ моменты эмпирического спектрального распределения

$$\mu_k^{(N)} := \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\int x^k dL_N\right),$$

стремятся к выражению

$$\lim_{N\to\infty} \mu_k^{(N)} = \sum_{l=1}^{k} c^l \mathcal{N}(k,l)$$

где

$$\mathcal{N}(k,l) = \frac{1}{k} C_k^l C_k^{l-1},$$

числа Нараяны и убедитесь, что они совпадают с моментами распределения Марченко-Пастура, заданного плотностью

$$f(x) = \frac{\sqrt{(a_+ - x)(x - a_-)}}{2\pi x}\mathbf{1}_{a_- \leq x \leq a_+},$$

где $a_\pm = (1 \pm \sqrt{c})^2$.

Указания:

1) Сведите задачу подсчета следов степеней матрицы R_N к задаче о циклах на двудольном графе. (Двудольным называется граф в котором есть два сорта вершин и все ребра соединяют только вершины разных сортов.)

2) Покажите, что циклы, вклад от которых выживает в пределе $N \to \infty$, обходят дерево и им можно сопоставить некоторые пути Дика. Проверьте совпадение чисел таких циклов с числами Нараяны для нескольких первых моментов.

3) Число Нараяны $\mathcal{N}(k,l)$ даёт количество путей Дика длиной в $2k$ шагов, в которых число нечетных шагов вверх равно l. Очевидно сумма чисел Нараяны дает полное число путей Дика - число Каталана,

$$C_k = \sum_{l=1}^{k} \mathcal{N}(k,l) = \frac{1}{k+1} C_{2k}^k$$

Связь чисел Нараяны с моментами распределения Марченко-Пастура можно установить как прямым интегрированием, так и воспользовавшись определением чисел Нараяны в терминах путей Дика и их связью с преобразованием Стильтьеса распределения Марченко-Пастура (см. задачу 3)).

Задача 2. Четвертькруговой закон

При $N = p$, $c = 1$, моменты распределения Марченко-Пастура становятся равны числам Каталана, которые дают также и четные моменты полукруглого закона Вигнера, а плотность обращается в *четверть-круговой закон*

$$f_{c=1}(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\mathbf{1}_{0\leq x\leq 1}.$$

Это название обусловлено его связью с полукруговым распределением Вигнера. В условиях предыдущей задачи воспользуйтесь теоремой Марченко-Пастура, чтобы найти предельное распределение собственных значений симметричной матрицы $2N\times 2N$ вида

$$\begin{pmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{pmatrix}$$

и объясните эту связь.

Задача 3. Числа Нараяны и преобразование Стильтьеса распределения Марченко-Пастура.

Пусть $\mathcal{N}(k,l)$ число Нараяны, определяемое как количество путей Дика длиной в $2k$ шагов, в которых число нечетных шагов вверх равно l. Из предыдущей задачи известно, что моменты распределения Марченко-Пастура играют роль производящей функции чисел Нараяны по второму аргументу

$$\beta_k(c) := \sum_{l=1}^{k} c^l \mathcal{N}(k,l).$$

Цель задачи вывести это соотношение, пользуясь определением чисел Нараяны в терминах путей Дика.

а) Следуя рецепту вывода рекуррентных соотношений для чисел Каталана, выведите рекуррентные соотношения для $\beta_k(c)$,

$$\beta_k(c) = (c-1)\beta_{k-1} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{k-j}(c)\beta_{j-1}(c)$$

а из них уравнение на производящую функцию

$$\beta(t,c) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(c) t^k,$$

где $\beta_0(c) := 1$.

Указание:

При выводе рекуррентных соотношений удобно ввести вспомогательную функцию $\bar{\beta}_k(c)$, перечисляющую пути Дика с фиксированным числом четных шагов вверх. Далее вывод следует рецепту вывода соотношений для чисел Каталана. Рассмотрите часть пути Дика до первого возвращения. Эта часть без первого и последнего шагов снова дает путь Дика, в котором четные шаги стали нечетными и наоборот. Таким образом можно выразить $\beta_k(c)$ через $\beta_j(c)$ и $\bar{\beta}_m(c)$ с $m, j < k$. То же самое можно проделать для $\bar{\beta}_k(c)$. Исключая из двух соотношений $\bar{\beta}_k(c)$ получаем замкнутое рекуррентное соотношение для $\beta_k(c)$.

б)Используя утверждение из Задачи 1, о том, что $\beta_k(c)$ - моменты предельного распределения, установите связь производящей функции этих моментов $\beta(t,c)$ и преобразования Стильтьеса предельного распределения. Выберете решение для $\beta(t,c)$, которое обладает свойствами преобразования Стильтьеса вероятностной меры. Обратите преобразование Стильтьеса и получите распределение Марченко-Пастура из предыдущей задачи.

Задача 4. Сходимость моментов распределения Вигнера.

Пусть $X_n = X_n^\dagger \in \mathbb{R}^{n\times n}$- вигнеровская матрица с независимыми одинаково распределенными матричными элементами, такими что

$$\mathbb{E}\,(X_n)_{ij} = 0, \mathbb{E}\left(X_n^2\right)_{ij} = 1, \mathbb{E}\,(X_n)_{ij}^k < \infty, \quad 1 \le i \le j \le n.$$

1. Пользуясь неравенством Маркова и первой леммой Бореля-Контелли, докажите, что для моментов эмпирического спектрального распределения матрицы $M_n = X_n n^{-1/2}$, имеет место сходимость почти наверное. (План доказательства намечен в лекциях.)

2. Докажите, что в условии задачи требование $\mathbb{E}\,(X_n)_{ij} = 0$ является лишним и матожидание может быть равно любой другой величине .

Задача 5. Метод распределения Стильтьеса и полукруглый закон Вигнера

Пусть $X = X^T \in \mathbb{R}^{N\times N}$ — симметричная матрица , матричные элементы которой выше и на главной диагонали есть независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, $\mathbb{E}(X_{ij}=0)$, дисперсией, $\mathbb{D}(X_{ij}) = 1/N$. Выведите предельное выражение эмпирической спектральной меры такой матрицы методом преобразования Стильтьеса при $N\to\infty$.

а) Найдите связь между диагональным элементом $(G_N(z))_{ii}$ резольвенты такой матрицы

$$G_N(z) = (X - I_N z)^{-1}$$

и резольвентой $G_{N-1}^{(i)}(z)$ матрицы $X^{(i,i)}$, полученной вычеркиванием $i-$й строки и $i-$го столбца из матрицы X (используйте результаты задачи 7).

б) Заменяя в полученном выражении $(G_N(z))_{ii}$, $X_{ij}\left(G_{N-1}^{(i)}(z)\right)_{jk} X_{ki}$ и X_{ii} их матожиданиями и предполагая близость преобразований Стильтьеса

$$s_N(z) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_i - z}\right) = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}G(z)$$

эмпирического спектрального распределения матриц X и $X^{(i,i)}$ получите уравнение на $s_N(z)$ в пределе $N\to\infty$.

в) Выберите решение полученного уравнения, которое удовлетворяет свойствам преобразования Стильтьеса, и, обратив его, выведите закон Вигнера.

Задача 6. Сходимость почти наверное и подсчет моментов.

Пусть $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$-последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве, принимающих комплексные значения, с независимыми одинаково распределенными вещественной и мнимой частями, таких что

$$\mathbb{E}x_1 = 0, \mathbb{E}|x_1|^2 = 1, \mathbb{E}|x_1|^8 < \infty,$$

и $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$– последовательность независимых от $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ эрмитовых матриц $A_m = A_m^\dagger \in \mathbb{C}^{m\times m}$, с ограниченной спектральной нормой, т.е. найдется константа $c > 0$, такая что

$$\sup_{\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^m:||\boldsymbol{v}||_2=1\}} \|A_m v\|_2 < c, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

С помощью подсчета моментов докажите, что имеет место сходимость

$$\mathbf{y}_m A_m \mathbf{y}_m^\dagger - \frac{1}{m}\mathrm{Tr}A_m \xrightarrow[m\to\infty]{\text{п.н.}} 0,$$

где $\mathbf{y}_m = m^{-1/2}(x_1, \ldots, x_m)$. Существование какого момента случайной величины x_1 обеспечивает такую же сходимость по вероятности?

Задача 7. Закон Марченко-Пастура и свободная вероятность.

Пусть X - случайные матрицы из задачи 1 и R_N -соответствующая выборочная коварицонная матрица. Матрицу R_N можно представить в виде суммы

$$R_N = \sum_{s=1}^{p} R_N^s,$$

где R_N^s — матрица ранга один с матричными элементами.

$$(R_N^s)_{ij} := \frac{1}{N} X_{is} X_{js}.$$

Докажите теорему Марченко-Пастура, воспользовавшись асимптотической свободной независимостью матриц R_N^s.

Указание:

1) Матрица R_N^s имеет $N-1$ нулевых собственных значений (почему?) и одно ненулевое в направлении $\boldsymbol{X}^s = (X_{1s}, \ldots, X_{Ns})$.

2) Используя закон больших чисел, вычислите к чему сходятся следы степеней матрицы R_N^s и постройте предельное преобразование Стильтьеса ее спектральной меры.

3) Используя закон больших чисел, покажите, что вектора $\boldsymbol{X}^s$ и $\boldsymbol{X}^{s'}$ ортогональны почти наверное при $N \to \infty$ и докажите, что матрицы $R_N^1, \ldots, R_N^p$ асимптотически свободно независимы в некоммутативном по отношению к функционалу $\tau(M) = N^{-1}\mathbb{E}\mathrm{Tr}M$.

4) Постройте R-преобразование спектральной меры R_N^s и далее предельный вид R_N. Вернитесь к преобразованию Стильтьеса, и убедитесь, что оно совпадает с преобразованием распределения Марченко-Пастура.

Задача 8. Дополнение Шура.

Пусть $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$ - комплексная матрица, имеющая блочную структуру

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где $A \in \mathbb{C}^{m\times m}, D \in \mathbb{C}^{(N-m)\times(N-m)}, B \in \mathbb{C}^{m\times(N-m)}, B \in \mathbb{C}^{(N-m)\times m}$. Докажите, что, если матрица D обратима, то определитель M равен

$$\det M = \det D \det \left(A - BD^{-1}C\right),$$

а обратная матрица имеет блочный вид

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Указание: Всякую матрицу можно представить в виде произведения блочнонижнетреугольной, блочнодиагональной и блочноверхнетреугольной матриц, первая и третья с единицами на главной диагонали. Тогда вычисление детерминанта и обращение можно производить блочно. Рассмотрите матрицу

$$L = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -D^{-1}C & I_{N-m} \end{pmatrix},$$

и перепишите ML в виде

$$ML = \tilde{L}\tilde{M},$$

где $\tilde{L}$ — верхнетреугльная блочная матрица, с единичными блоками на главной диагонали, а $\tilde{M}$- блочнодиагональная. Тогда $M = MLL^{-1} = \tilde{L}\tilde{M}L^{-1}$ — искомое разложение.