

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2023
Листок 3

1. Найдите все точки, в которых \mathbb{C} -дифференцируемы функции
а) $|z|^2$, б) $|z|z$, в) $(\operatorname{Re} z)^2$.

2. а) При каких комплексных a, b, c функция $f(z) = az + b\bar{z} + z^2 + c$ имеет комплексную производную в точке $z = 0$? б) При каких вещественных a, b функция $f(x, y) = ax^2 + by^2 + ixy$ голоморфна на всем \mathbb{C} ?

3. Пусть $f(z)$ – дифференцируемая функция комплексного переменного в точке a . Докажите, что функция $f(\bar{z})$ дифференцируема в точке \bar{a} .

4. Покажите, что функция $f : re^{i\varphi} \mapsto re^{2i\varphi}$ не голоморфна на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5. а) Докажите, что если голоморфная в некоторой области функция $f(z)$ вещественна (т.е. принимает только вещественные значения), то она постоянна. б) Пусть функция $f(z)$ голоморфна в некоторой области D , и $|f(z)| = 1$ всюду в этой области. Докажите, что $f(z) \equiv \text{const}$.

6. Восстановите аналитическую функцию $f(z)$ по условию:

а) $\operatorname{Re} f(z) = \sin x \cosh y, f(0) = 0$,

б) $\operatorname{Re} f(z) = x \sin x \cosh y - y \sinh y \cos x, f(0) = 0$,

в) $\operatorname{Im} f(z) = y \cos x \cosh y - x \sin x \sinh y, f(0) = 2$,

г) $|f(z)| = (x^2 + y^2)e^x$,

д) $\arg f(z) = xy$.

7. Докажите, что аналитическую в \mathbb{C} функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ можно восстановить по ее вещественной части u или мнимой части v с помощью формул

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + z_0}{2}, \frac{z - z_0}{2i}\right) - \overline{f(\bar{z}_0)},$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z + z_0}{2}, \frac{z - z_0}{2i}\right) + \overline{f(\bar{z}_0)},$$

где $z_0 \in \mathbb{C}$ – некоторая точка.

Вещественнозначная функция двух вещественных переменных $F(x, y)$ называется *гармонической*, если $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.

8. Запишите оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в координатах z, \bar{z} .

9. Пусть $f(z)$ – голоморфная функция. Докажите, что функции $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ – гармонические (т.е. $\Delta \operatorname{Re} f = \Delta \operatorname{Im} f = 0$). Что можно сказать о функциях $|f|$ и $\arg f$?

10. Пусть $F(x, y)$ – гармоническая функция. Для каких функций G функция $G(F(x, y))$ тоже будет гармонической?

11. Найдите все гармонические функции вида а) $F = \varphi(x^2 + y^2)$,
б) $F = \varphi(x^2 - y^2)$, в) $F = \varphi(y/x)$.

12. Пусть $u(x, y)$ – гармоническая функция. Являются ли гармоническими функции $u(x, -y)$, $u(x^2 - y^2, 2xy)$?

13. Найдите гармоническую функцию $u(x, y)$ на \mathbb{C} такую, что $u(\cos t, \sin t) = \cos^2 t$.