Алгебры Ивахори–Гекке (тип A_{n-1}) 1

§ 1 Определение и факты.

Def: Алгебра Ивахори–Гекке (Iwahori-Hecke) $H_n(q)$ задаётся в терминах генераторов g_i, $i=1,2,\dots,n-1$, и соотношений

$$\begin{cases} g_i g_j = g_j g_i \quad \forall i,j : |i-j|>1, & (1а) \\ g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \ (\text{соотношение кос}) & (1б) \\ g_i^2 = 1 + (q-q^{-1}) g_i \ (\text{соотношение Гекке}) & (1в) \end{cases}$$

Мы рассматриваем эту алгебру над полем $\mathbb{C}$, $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. — параметр алгебры.

Rem 1: $H_n(q)$ — фактор-алгебра $\mathbb{C}[B_n]$ по двусторон-нему идеалу, порождаемому соотношением Гекке (1в)

Rem 2: Условие Гекке (1в) достаточно наложить на гене-ратор g_1, остальные g_i связаны с g_1 внутренним авто-морфизмом в $H_n(q)$. Из (1в) следует $\boxed{\operatorname{Spec} g_i = \{q, -\frac{1}{q}\}}$. Применяя масштабное преобразование $\boxed{g_i \mapsto x g_i}$, можно любое совместное с соотношениями (1а,б), квадратичное условие вида $(g_i - \lambda_1 1)(g_i - \lambda_2 1) = 0$, $\lambda_{1,2} \neq 0$, привести к виду (1в).

Rem3. Накладывая квадратичные соотношения типа (1б) на артиновы генераторы групп кос других типов ($B_{n-1}, C_{n-1}, \tilde{A}_{n-1}$) можно задавать алгебры Ивахори-Гекке других типов.

Приведем список результатов об алгебрах $H_n(q)$ (далее для краткости называем их алгебрами Гекке). Часть фактов мы докажем сразу, остальные будут доказаны в процессе построения неприводимых представлений $H_n(q)$.

Факт 1 $\boxed{\dim H_n(q) = n!}$ (2)

Докажем сразу, что $\dim H_n(q) \le n!$ Для этого построим набор элементов $H_n(q)$ такой, что $H_n(q)$ будет их линейной оболочкой.

Воспользуемся цепочкой вложений алгебр, называемой башней алгебр:

$$\boxed{1 \subset H_2(q) \subset H_3(q) \subset \ldots \subset H_{n-1}(q) \subset H_n(q) \subset \ldots}$$

где алгебра $H_i(q)$ порождается генераторами $g_1, \ldots, g_{i-1}$

(3)

Утверждение 1: $\boxed{H_n(q) = \mathrm{Span}(H_{n-1},\ H_{n-1}\, g_{n-1}\, H_{n-1})}$

Здесь H_n рассматривается как линейное пространство.

Док-во сводится к проверке того, что любое слово, построенное из генераторов $g_1, \ldots, g_{n-1}$ с использованием соотношений (1а-в) может быть выражено в виде линейной комбинации слов, в которых генерато g_{n-1} встречается не более 1 раза ▨

Утверждение 2 Пусть $\{x_\alpha\}$ - набор элементов $H_{n-1}(q)$ такой, что $H_{n-1} = \mathrm{Span}(\{x_\alpha\})$. Тогда

$$\boxed{H_n = \mathrm{Span}(\{x_\alpha; x_\alpha g_{n-1}; x_\alpha g_{n-1} g_{n-2}; \ldots; x_\alpha g_{n-1} \cdots g_2 g_1\})}$$

Проверка этого утверждения является частью задачи 1 листка 2.

Воспользовавшись Утв. 2 индукцией по n убеждаемся:

$$\boxed{\dim H_n \leq n!} \qquad (2')$$

Факт 2 $\boxed{H_n(q) \cong \mathbb{C}[S_n]}$, если $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ удовлетворяет неравенствам

$$\boxed{q^{2k} \neq 1, \quad k = 2, \ldots, n} \qquad (4)$$

Заметим, что случай $q^2 = 1$, т.е., $q = \pm 1$ не исключается неравенствами (4). В этом случае (1а-в) совпадают с соотношениями на артиновы генераторы симметрической группы, т.е.

$$\boxed{H_n(\pm 1) \cong \mathbb{C}[S_n]}$$

Факт 3 Как мы отмечали в лекциях про группу кос (см. записки, стр. 34), в B_n имеется замечательный набор коммутирующих между собой элементов Юциса-Мэрфи:

$$\boxed{J_1 = 1\,,\ J_2 = g_1^2\,,\quad J_{i+1} = g_i J_i g_i \quad i = 2, \dots, n-1} \tag{5}$$

Подалгебру, порождаемую элементами $\{J_i\}_{i=1\dots n}$ будем называть подалгеброй Юциса-Мэрфи – $JM_n \subset H_n$

$$\boxed{\text{Подалгебра } JM_n \subset H_n(q) \text{ является максимальной коммутативной подалгеброй}} \tag{6}$$

Def Коммутативная подалгебра B алгебры A называется максимальной коммутативной, если в $\forall$ неприводимом представлении $A \to End(V)$ $\exists$ базис $\{v_\alpha\}$, в котором все элементы подалгебры B диагональны, причем не существует двух базисных векторов, на которых все элементы B действуют идентично.

Иными словами, набор собственных значений генераторов подалгебры B можно выбрать в качестве индекса α, нумерующего векторы базиса $\{v_\alpha\}$.

Rem. Понятно, что максимальную коммутативную подалгебру полупростой алгебры невозможно расширить, сохранив свойство коммутативности. Однако она не является коммутативной подалгеброй максимальной размерности. Например, в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ подалгебра диагональных матриц, порождаемая набором диагональных матричных единиц — $\mathrm{Span}(E_{ii})_{i=1..n}$ — имеет размерность n и является максимальной коммутативной. А подалгебра $\mathrm{Span}(E_{ij}: i \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, j > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ тоже коммутативна, имеет размерность $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ ($\ge n$ при $n \ge 5$), но не является максимальной.

<u>Факт 4</u> В группе кос B_n её центр порождается произведением всех элементов JM: $Z_n = \prod_{i=1}^{n} J_n$. При факторизации в алгебру $H_n(q)$ центр расширяется:

$$\boxed{Z(H_n(q)) = \mathrm{Symm}(J_1, J_2, \ldots J_n)}$$

симметрические многочлены от J_i, $i=1..n$.

Сейчас мы проверим, что $\boxed{Z(H_n(q)) \supset \mathrm{Symm}(J_1, \ldots J_n)}$

<u>Утверждение 3</u>: В алгебре $H_n(q)$ выполняются соотношения

$$\boxed{\begin{cases} [g_i, J_k] = 0 \quad \forall i \neq k, k-1 & (7а) \\ [g_i, J_i J_{i+1}] = 0 & (7б) \\ [g_i, J_i + J_{i+1}] = 0 & (7в) \end{cases}}$$

<u>Док-во</u>: Соотношения (7а) и (7б) выполняются в группе кос (т.е. благодаря соотношениям (1а,б)). Например,

$$g_i J_i \underbrace{J_{i+1}}_{(5)} = \underbrace{g_i J_i g_i}_{(5)} J_i g_i = J_{i+1} J_i g_i = J_i J_{i+1} g_i$$

Для проверки (7в) потребуется соотношение Гекке:

$$g_i(J_i + \underbrace{J_{i+1}}_{(5)}) = g_i J_i + \underbrace{g_i^2}_{(1в)} J_i g_i = \underline{g_i J_i + J_i g_i + (q-q^{-1}) g_i J_i g_i}$$

Полученное выражение не меняется при прочтении справа-налево (т.е., зеркально-симметрично), поэтому его можно преобразовать в обратном порядке к виду $(J_i + J_{i+1}) g_i$, зеркально симметричному исходному выражению

Заметим, что в $\forall$ симметричный по $\{J_i\}_{i=1..n}$ полином пара генераторов J_i и J_{i+1} входит только в виде комбинаций $J_i J_{i+1}$ и $(J_i + J_{i+1})$ (т.к. эти комбинации порождают алгебру симметрических многочленов 2-х переменных J_i и J_{i+1}).

Следовательно, соотношения (7а-в) подразумевают

$$Symm(J_1, J_2, \dots, J_n) \subset \mathbb{Z}(H_n(q)).$$

§2. Неприводимые представления $H_n(q)$: спектр элементов Юциса-Мэрфи.

Анзац. Мы займемся построением неприводимых представлений
$$\rho_V : H_n(q) \longrightarrow \mathrm{End}(V),$$
которые имеют базис $\{v_\alpha\}$, где действие элементов JM диагонально:
$$\boxed{J_i v_\alpha = a_i v_\alpha \quad \forall i=1\ldots n,\ \forall \alpha.} \quad (8)$$

Забегая вперед: мы убедимся, что индексы α базисных векторов можно отождествить с наборами $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ собственных значений элементов J_i на векторе v_α.

Наша цель: построить явно все такие представления ρ_V и убедиться, что сумма квадратов их размерностей равна $n!$, откуда будет следовать: $\dim H_n = n!$, H_n – полупроста, и мы классифицировали все неприводимые представления H_n.

Такое возможно лишь при определенных ограничениях на параметр q. Мы их наложим:
$$\boxed{q \neq \pm 1, \quad q^{2k} \neq 1 \ \ \forall k=2,\ldots,n} \quad (9)$$

Эти случаи не требуют рассмотрения

и мы увидим, когда ограничения (9) будут необходимы.

Наш метод: использовать структуру башни алгебр $1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n$ и применить индукцию по n.

База индукции – $H_2(q)$. Это 2-мерная алгебра с базисом $1, g_1$. Она полупроста в случае, если собственные значения g_1 различны: $q \neq -\frac{1}{q}$, т.е. $q^2 = -1$ или $q^4 \neq 1$ ($q = \pm 1$ исключили). У этой абелевой алгебры 2 одномерных представления:

"тождественное" $g_1 \mapsto q$ $(J_2 \mapsto q^2)$

и "знакопеременное" $g_1 \mapsto -q^{-1}$ $(J_2 \mapsto q^{-2})$

Терминология заимствована у 1-мерных представлений симметрической группы (случай $q=1$).

Предположение индукции: алгебра $H_{n-1}(q)$ при условии (q) /записанном для $(n-1)$/ полупроста, все её неприводимые представления удовлетворяют условию Анзаца, и для них верны все формулируемые ниже результаты о спектре элементов JM_{n-1}.

Теорема 1 Рассмотрим неприводимое представление $\rho_V: H_n(q) \to \mathrm{End}(V)$, удовлетворяющее условию (8) анзаца. Для $\forall$ вектора v_α из его базиса выполнены условия:

(а) $\boxed{a_i \neq a_{i+1}} \ \forall i$ (10)

(б) если $a_i \neq q^{\pm 2} a_{i+1}$, то наряду с вектором v_α, $\exists$ вектор $v_{\alpha'} \in V$, такой что

$$\boxed{\begin{gathered} J_i v_{\alpha'} = a_{i+1} v_{\alpha'}, \quad J_{i+1} v_{\alpha'} = a_i v_{\alpha'} \\ J_k v_{\alpha'} = a_k v_{\alpha'} \quad \forall k \neq i, i+1 \end{gathered}} \qquad (11)$$

т.е. у $v_{\alpha'}$, по сравнению с v_α переставляются только собственные значения J_i и J_{i+1}. Поэтому индекс α' будем обозначать $\boxed{\alpha' = \sigma_i \circ \alpha}$

(в) если $a_{i+1} = q^{\pm 2} a_i$, то $\nexists\, v_{\sigma_i \circ \alpha} \in V$, причём

$$\boxed{g_i v_\alpha = \pm q^{\pm 1} v_\alpha} \qquad (12)$$

В базисе $\{v_\alpha\}$ нет векторов с совпадающими наборами $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, то есть представление индексов векторов

$$\boxed{\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}} \qquad (13)$$

корректно.

Док-во:

Докажем ⓐ от противного. Предположим, для некоторого v_α $a_i = a_{i+1} = a$, т.е. $J_i v_\alpha = J_{i+1} v_\alpha = a v_\alpha$

Из цепочки равенств

$$\begin{array}{c} g_i J_i v_\alpha = a g_i v_\alpha \\ \| \\ J_{i+1} g_i^{-1} v_\alpha = J_{i+1} g_i v_\alpha - (q-q^{-1}) a v_\alpha \end{array}$$

соотн. Гекке $\Leftrightarrow g_i^{-1} = g_i - (q-q^{-1})1$

следует:

$$(J_{i+1} - a1) g_i v_\alpha = (q-q^{-1}) a v_\alpha$$

Разлагая $g_i v_\alpha$ по базису: $g_i v_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta} v_\beta$ мы замечаем, что оператор $(J_{i+1} - a1)$ "убивает" в левой части равенства слагаемое $c_{\alpha\alpha} v_\alpha$, а в правой части равенства оно присутствует с $\neq 0$ коэффициентом. Получили противоречие – линейную зависимость базисных векторов, что доказывает ⓐ.

Для доказательства ⓑ рассмотрим вектор

$$\boxed{\omega = \left(g_i + (q-q^{-1}) \frac{a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} 1\right) v_\alpha} \quad (14)$$

Нетрудно убедиться, что при условии $a_i \neq q^{\pm 2} a_{i+1}$ оператор, действующий в правой части (14) на v_α, обратим.

Следовательно, $\underline{\omega \neq 0}$.

Соотношения (7а) подразумевают $\boxed{J_k \omega = a_k \omega \ \forall k \neq i, i+1}$

Вычислим действие J_i на ω

$$J_i\omega = J_i\left(g_i + (q-q^{-1})\frac{a_{i+1}}{a_i-a_{i+1}}\right)v_\alpha = \left(g_i^{-1}J_{i+1} + (q-q^{-1})\frac{a_i a_{i+1}}{a_i-a_{i+1}}\right)v_\alpha$$

$$= \left((g_i-(q-q^{-1})1)\,a_{i+1} + (q-q^{-1})\frac{a_i a_{i+1}}{a_i-a_{i+1}}\right)v_\alpha$$

$$= a_{i+1}\left(g_i + (q-q^{-1})\left(\frac{a_i}{a_i-a_{i+1}}-1\right)\right)v_\alpha = a_{i+1}\omega$$

Аналогично вычисляем $J_{i+1}\omega = a_i\omega$. Таким образом $\omega = v_{\sigma_i\circ\alpha}$,

Для доказательства пункта (б) нам потребуется

Лемма 1 В предположениях теоремы рассмотрим разложение $V = U_a \oplus U_{\not a}$, где

$$U_a := \mathrm{Span}\left(v_\alpha \in \{v\} : J_n v_\alpha = a v_\alpha\right) \; /\text{т.е. } \alpha = \{\dots, a_n = a\}/ \tag{15}$$
$$U_{\not a} := \mathrm{Span}\left(v_\alpha \in \{v\} : J_n v_\alpha \neq a v_\alpha\right)$$

Тогда U_a является пространством неприводимого представления $H_{n-1}(q)$.

Следствие леммы: $\boxed{V = \bigoplus_{a\in \mathrm{Spec} J_n} U_a}$, где a пробегает всевозможные значения J_n на векторах базиса $\{v_\alpha\}$, а U_a – неприводимые представления $H_{n-1}(q)$, определяемые формулой (15).

Док-во: Инвариантность действия $H_{n-1}(q)$ на U_a и $W_{\not a}$ следует из коммутативности $J_n H_{n-1} = H_{n-1} J_n$ (см. (7а)):

$$H_{n-1}U_a \subset U_a, \quad H_{n-1}U_{\not a} \subset U_{\not a} \tag{16}$$

Неприводимость действия H_{n-1} на U_a проведём от противного. Предположим $\exists\ U' \neq U_a, 0$; $U' \subset U_a$ такое что

$$\boxed{H_{n-1} U' \subset U'} \qquad (17)$$

В силу неприводимости V

$$\boxed{H_n U' = V \supset U_a} \qquad (18)$$

Используем разложение (3):

$$H_n U' = \mathrm{Span}\left(H_{n-1} U', H_{n-1} g_{n-1} H_{n-1} U'\right) \subset \mathrm{Span}\left(U', H_{n-1} g_{n-1} U'\right) \quad (19)$$

Используя предположение индукции со стр. 8, мы можем представить пространство U' представления полупростой алгебры $H_{n-1}(q)$ в виде прямой суммы неприводимых, а в каждом из них выбрать базис, в котором элементы ЈМ: $J_1, \dots, J_{n-1}$ действуют диагонально. В построенном таким образом базисе U' – $\{\varphi_\alpha\}$.

Используя рассуждения из доказательства пункта б) определяем действие генератора g_{n-1} на базисных векторах φ_α (сравните с (14)):

$$\boxed{g_{n-1} \varphi_\alpha = \varphi_{\sigma_{n-1}\circ\alpha} - (q - q^{-1}) \frac{a}{a_{n-1} - a} \varphi_\alpha}$$

Здесь a_{n-1} и $a_n = a$ – собственные значения J_{n-1} и J_n на φ_α, а вектор $\varphi_{\sigma_{n-1}\circ\alpha}$ не обязан быть $\neq 0$, т.к. мы не накладываем здесь условия $a_{n-1} \neq q^{\pm 2} a$. Однако мы знаем, что $J_n \varphi_{\sigma_{n-1}\circ\alpha} = a_{n-1} \varphi_{\sigma_{n-1}\circ\alpha} \neq a\varphi_{\sigma_{n-1}\circ\alpha}$, т.е

$$\boxed{\varphi_{\sigma_{n-1}\circ\alpha} \in \cancel{U_\alpha}}$$

Следовательно, $\boxed{g_{n-1} U' \subset \mathrm{Span}(U', U_{\not\alpha})}$,

и в силу (17), (16):

$$\boxed{H_{n-1} g_{n-1} U' \subset \mathrm{Span}(U', U_{\not\alpha})}$$

Завершая рассуждение (19), получаем:

$$H_n U' \subset \mathrm{Span}(U', U_{\not\alpha}) \neq V,$$

поскольку $U_a \subset \mathrm{Span}(U', U_{\not\alpha})$. Противоречие с (18) доказывает неприводимость U_a: $H_n U_a = U_a$.

Заметим, что последнее утверждение Теоремы – (13) следует из Предположения индукции (стр. 8) и Следствия из Леммы 1 (стр. 11).

Остаётся доказать пункт б.

Мы можем считать, что формула (12) верна $\forall g_i, i<n-1$. Действительно, в силу Следствия из Леммы 1, пространство V разлагается в прямую сумму неприводимых представлений $H_{n-1}(q)$, а в каждом из них (12) выполняется для $g_i, i<n$ по Предположению индукции.

Остаётся доказать (12) для g_{n-1}. Для определённости рассмотрим случай v_α, где $\alpha = \{a_1, \ldots, a_{n-2}, a, q^2 a\}$.

Предположим, что вектор ω, задаваемый (14), нетривиален:

$$\boxed{\omega = v_{\sigma_{n-1}\circ\alpha} = (g_{n-1} - q1) v_\alpha \neq 0} \qquad (20)$$

Отметим: $\left\{ \begin{array}{l} v_\alpha \in U_{q^2 a} \\ \text{т.к. } \alpha = \{\ldots, a, q^2 a\} \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{l} \omega \in U_a \\ \sigma_{n-1}\circ\alpha = \{\ldots, q^2 a, a\} \end{array} \right.$

Здесь мы использовали обозначения пространств из док-ва Леммы 1.

Соотношение Гекке (1б) подразумевает:

$$\boxed{g_{n-1}\omega = -q^{-1}\omega} \qquad (21)$$

В силу неприводимости V должно быть $H_n\omega = V$. Используя ту же методику, что и в доказательстве Леммы мы убедимся, что это не так:

$$\boxed{H_n\omega = \mathrm{Span}(H_{n-1}\omega, H_{n-1}g_{n-1}H_{n-1}\omega)} \qquad (22a)$$

Из (20) заключаем $\boxed{H_{n-1}\omega \subset V_a}$ /на самом деле даже $H_{n-1}\omega = V_a$ в силу неприводимости представления V_a алгебры H_{n-1}, но это нам не потребуется/.

Изучим более детально пространство $H_{n-1}g_{n-1}H_{n-1}\omega$:

$$\boxed{H_{n-1}g_{n-1}H_{n-1}\omega} = \mathrm{Span}(H_{n-1}g_{n-1}H_{n-2}\omega, H_{n-1}g_{n-1}H_{n-2}g_{n-2}H_{n-2}\omega) =$$

$$= \mathrm{Span}(H_{n-1}g_{n-1}\omega, H_{n-1}g_{n-1}g_{n-2}H_{n-2}\omega) \quad /\text{т.к. } g_{n-1}H_{n-2} = H_{n-2}g_{n-1} \qquad (22б)$$

В силу (21):

$$\boxed{H_{n-1}g_{n-1}\omega = H_{n-1}\omega \subset V_a}. \qquad (22в)$$

$H_{n-2}\omega$ – пространство неприводимого представления H_{n-2}. Выберем в нём базис $\{\varphi_\beta\}$, где индекс β имеет вид

$$\beta = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, q^2a, a\}.$$

Согласно (14) генераторы g_{n-2} действуют в этом базисе так:

$$\boxed{g_{n-2}\varphi_\beta = \varphi_{\sigma_{n-2}\circ\beta} - (q-q^{-1})\frac{q^2a}{a_{n-2}-q^2a}\varphi_\beta}$$

Так как $\sigma_{n-2}\circ\beta$ имеет вид $\sigma_{n-2}\beta = \{\ldots q^2a, a_{n-2}, a\}$, где $\underline{a_{n-2} \neq q^2 a}$. /в силу пункта ⓐ Теоремы и предположения индукции/ заключаем:

$$g_{n-2} H_{n-2} \omega \subset \mathrm{Span}(H_{n-2}\omega, U_{q^2a,a}),$$

где мы обозначили символом $U_{q^2a,a}$ подпространство V, в котором $J_n = a$, $J_{n-1} \neq q^2 a$.

Наконец,

$$H_{n-1} g_{n-1} (g_{n-2} H_{n-2} \omega) \subset \mathrm{Span}(\underbrace{H_{n-1} g_{n-1} H_{n-2} \omega}_{= H_{n-1} g_{n-1} \omega \overset{(21)}{=} H_{n-1}\omega}, H_{n-1} U_{q^2a,a}, H_{n-1} U_{a,q^2a}) \subset$$

$$\subset \mathrm{Span}(U_a, U_a, U_{q^2a}) = \mathrm{Span}(U_{q^2a}) \qquad (22г)$$

Объединяя (22а)–(22г) получаем:

$$\boxed{H_n \omega \subset \mathrm{Span}(U_{q^2a}) \not\ni v_\alpha} \qquad (23)$$

$$\Downarrow$$

$$H_n \omega \neq V$$

Для разрешения противоречия (23) с неприводимостью V необходимо положить $\omega = 0$, т.е.

$$\boxed{g_{n-1} v_\alpha = q v_\alpha,} \qquad (24)$$

т.е., мы доказали (12).

Утверждени пункта ⓑ Теоремы о $\nexists v_{\sigma_{n-1}\circ\alpha} \subset V$ следует из формулы (24) так же, как мы выводили (23) из формулы (21). ▨

Следствие Теоремы

$$\boxed{a_i \in \{ q^{2k},\ k \in \{\ , \pm 1, \pm 2, \dots, \pm i\}\}} \qquad (25)$$

Док-во: $J_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$.

Необходимо, чтобы $q^{\pm 2} a_i$ совпало с одним из предыдущих индексов $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$, иначе a_i можно будет переставить на первое место: $\{a_i, \dots\}$, где может стоять только 1. Отсюда следует условие (25) ▨

Обсудим возможные значения индекса α при малых n:

В случае $n=2$ ($H_2(q)$) представление V может содержать векторы v_α с индексами

$$\alpha_1 = \{1, q^2\} \quad \text{или} \quad \alpha_2 = \{1, q^{-2}\}$$

α_1 порождает 1-мерное "тождественное" представление.
α_2 порождает 1-мерное "знакопеременное" представление.
Эти представления различны, если $q^2 \neq q^{-2}$, т. е. $q^4 \neq 1$ (см. условие (9)), тогда $H_2(q)$ полупроста, и мы построили все её неприводимые представления.

В случае $n=3$ ($H_3(q)$) условиям Теоремы удовлетворяют индексы

$$\alpha_1 = (1, q^2, q^4) \qquad \alpha_2 = (1, q^{-2}, q^{-4})$$

$$\alpha_3 = (1, q^2, q^{-2}) \qquad \alpha_4 = (1, q^{-2}, q^2)$$

$$\alpha_5 = (1, q^2, 1) \qquad \alpha_6 = (1, q^{-2}, 1)$$

Однако случаи $\alpha_{5,6}$ не реализуемы.
Действительно, для v_{α_5} в соответствии с пунктом 6 Теоремы имеем

$$g_1 v_{\alpha_5} = q v_{\alpha_5}, \quad g_2 v_{\alpha_5} = -\frac{1}{q} v_{\alpha_5},$$

что противоречит соотношению кос: $g_1 g_2 g_1 = g_2 g_1 g_2$.
Аналогично для v_{α_6}.

Видно, что v_{α_1/α_2} порождают одномерные "тождественное"/"знакопеременное" представления.

Нетрудно проверить, что $v_{\alpha_3}, v_{\alpha_4}$ порождают 2-мерное неприводимое представление.

Все эти выводы справедливы, при условии, что все индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ различны, т.е., если $q^4 \neq 1, q^6 \neq 1$ (см. (9)).

Сформулируем общее правило построения индексов α (это правило для S_n сформулировано Вершиком-Окуньковым).

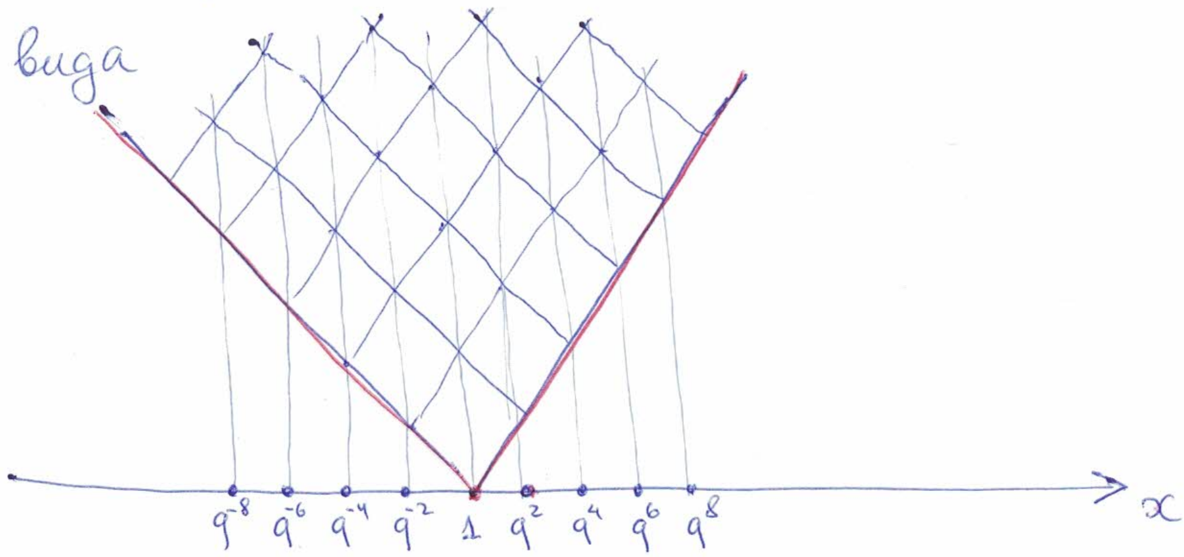
Правило $\alpha = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ является допустимым индексом вектора v_α из Теоремы 1 тогда и только тогда, когда

1. $a_1 = 1$
2. $\forall i \quad \{a_i q^2, a_i q^{-2}\} \cap \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\} \neq \emptyset$
3. $\forall i,j: \ i<j, \ a_i = a_j = a$
   $\exists k,l: \ i<k<j, \ i<l<j, \ a_k = q^2 a, \ a_l = q^{-2} a$

Док-во: Это упражнение из 2-го листка.

Правило воспроизводит алгоритм построения стандартных таблиц Юнга.

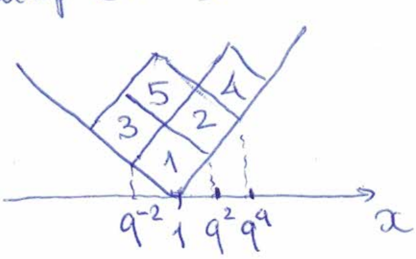
- Сопоставим каждому элементу Юциса-Мэрфи J_i, $i=1,\dots,n$, клетку с номером i : $\Diamond_i$.
- Будем последовательно опускать клетки в яму вида



- Последовательность опускания клеток соответствует их номерам: первой опускается клетка $\Diamond_1$, второй – $\Diamond_2$ и т.д.
- Клетки опускаются вниз, могут опираться на края ямы и на стороны уже опущенных клеток, и должны расположиться в одном из локальных минимумов конфигурации

Получающиеся конфигурации являются стандартными таблицами Юнга всевозможных диаграмм Юнга $\lambda \vdash n$

Пример ($n=5$):



$\Longleftrightarrow$

1	2	4
3	5	

Рис 1

Координаты клеток в яме по горизонтальной оси $\vec{x}$ отсчитываются в логарифмической шкале: $q^{2\mathbb{Z}}$, причём координата клетки $\langle i \rangle$, называемая её содержанием (content); $C_{\langle i \rangle}$ отождествляется с собственным значением a_i оператора JM J_i на базисном векторе v_α с индексом $\alpha = \{a_1, \dots a_i, \dots a_n\}$. Для примера на Рис. 1 имеем

$$\alpha = \{1, q^2, q^{-2}, q^4, 1\}$$

Таким образом индексу α взаимнооднозначно сопоставляется стандартная таблица Юнга:

$$v_{\{1, q^2, q^{-2}, q^4, 1\}} = v_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{smallmatrix}}$$

Итак, базисные вектора неприводимых представлений V алгебры $H_n(q)$ индексируются стандартными таблицами всевозможных разбиений $\lambda \vdash n$.

Какие из векторов v_α принадлежат одному представлению, а какие разным? Ответ даёт

Утверждение 4 Будем обозначать символом t_λ стандартную таблицу разбиения $\lambda \vdash n$.

При выполнении условий (9):

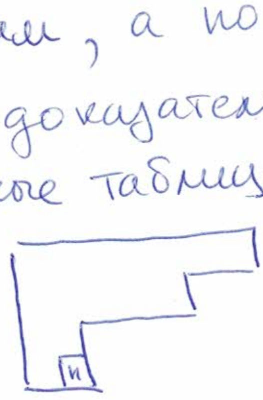
$$\boxed{q \neq \pm 1, \quad q^{2k} \neq 1, \quad k = 2, \dots, n,} \qquad (9)$$

(a) Вектора v_{t_λ} и $v_{t'_{\lambda'}}$ принадлежат базису одного пространства V из условия Теоремы 1 тогда и только тогда, когда $\lambda = \lambda'$. Следовательно, пространства неприводимых представлений $H_n(q)$ можно нумеровать разбиениями $\lambda \vdash n$.

(б) Базис пространства V_λ — $\{v_\alpha\}$ — содержит векторы, отвечающие всевозможным стандартным таблицам t_λ.

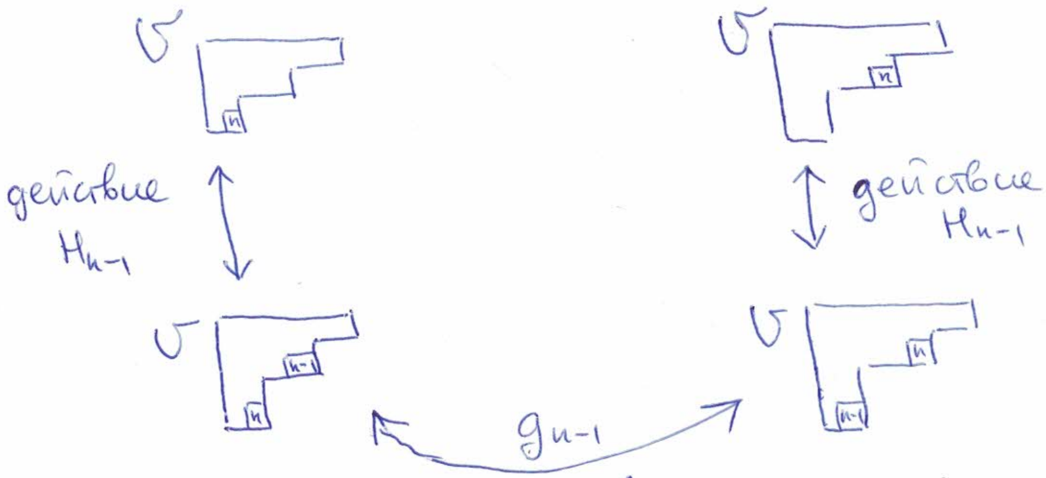
Док-во: Для доказательства пункта (а) используем лемму Шура. Центральные элементы $H_n(q)$ — симметрические полиномы по J_i, $i=1,\dots n$ — являются скалярными операторами в неприводимых представлениях. Их значения — симметрические полиномы по a_i, $i=1\dots n$, должны совпадать на всех базисных векторах v_α. В частности, должны совпадать коэффициенты многочленов $\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$, а значит и набор корней этих многочленов $\{a_i\}_{i=1\dots n}$ должен быть одинаков для всех базисных векторов v_α одного представления ρ_V. По заданному набору $\{a_i\}$ — содержаний клеток стандартной таблицы — разбиение $\lambda \vdash n$ восстанавливается однозначно (например, можно по $\{a_i\}$ однозначно построить стандартную таблицу, где числа упорядочены по строкам, а по ней восстановить форму λ).

Для доказательства пункта (б) рассмотрим 2 стандартные таблицы одной формы λ:



и

Последняя клетка ⟨n⟩ стоит в одном из внешних углов этих таблиц. Убрав клетку ⟨n⟩ мы получаем таблицу, отвечающую неприводимому представлению $H_{n-1}(q)$ (по Лемме 1). По предположению индукции вектора базиса неприводимого представления $H_{n-1}(q)$ нумеруются всевозможными стандартными таблицами одной формы. Значит возможны преобразования:



Горизонтальный переход на этой схеме возможен под действием g_{n-1} (по формуле (14)) при условии, что $a_n \notin \{a_{n-1}, q^2 a_{n-1}, q^{-2} a_{n-1}\}$ для векторов в нижней строке схемы. Неравенства (9) гарантируют соблюдение этих условий.

Например, для таблицы  $a_n = q^{-2}$, $a_{n-1} = q^{2(n-2)}$, и условие $a_n \notin \{a_{n-1}, q^{\pm 2} a_{n-1}\}$ сводится к $q^{2n} \neq 1$, $q^{2(n-1)} \neq 1$, $q^{2(n-2)} \neq 1$

Таким образом, из $\forall$ базисного вектора $v_t \in V$ можно построить вектора, отвечающие всевозможным стандартным таблицам той же формы, что и t_x ∎