СЕМИНАР 5

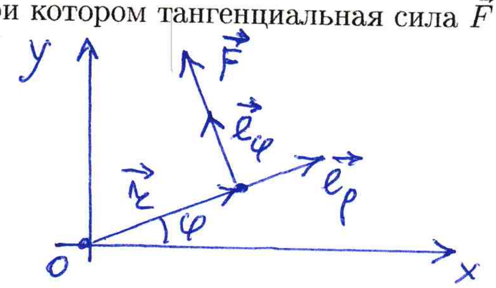
Работа и условия потенциальности в криволинейных координатах

Рассмотрим вопрос о вычислении работы силы и нахождения условий потенциальности в криволинейных координатах. Наше внимание будет сосредоточено на двух таких системах координат — цилиндрической (полярной) и сферической. Переход от декартовых координат к цилиндрическим или сферическим координатам в пространстве $\mathbb{R}^3$ становится сингулярным в точках прямой Oz (якобиан перехода зануляется на этой оси), а если эту прямую удалить из пространства $\mathbb{R}^3$, оно потеряет односвязность. Как следствие, локальные дифференциальные условия потенциальности в криволинейных координатах нужно дополнять, если мы хотим убедиться в потенциальности некоторой силы во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Разберем эту особенность на простом примере так называемой "тангенциальной силы" в плоскости $\mathbb{R}^2$.

Пример 1. Пусть в плоскости $\mathbb{R}^2$ задано силовое поле, вектора которого в любой точке плоскости касаются окружности с центром в начале координат, проходящей через эту точку. Иными словами, сила $\vec{F}$ в каждой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ направлена вдоль орта $\vec{e}_\phi$ полярной системы координат:

$$\vec{F} = f(x, y)\vec{e}_\phi,$$

где $f(x, y)$ — гладкая функция декартовых координат точки наблюдения. Найдем общий вид функции $f(x, y)$, при котором тангенциальная сила $\vec{F}$ будет потенциальной.



Как мы помним, в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$ имеется одно необходимое локальное условие потенциальности:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

Поскольку $\vec{e}_\phi = -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y$, то компоненты силы $\vec{F}$ в декартовых координатах записываются в виде:

$$F_x = -f\sin\phi = -f(x, y)y/\rho, \qquad F_y = f\cos\phi = f(x, y)x/\rho,$$

где использованы формулы перехода к полярным координатам:

$$\sin\phi = \frac{y}{\rho}, \qquad \cos\phi = \frac{x}{\rho}, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Необходимое условие потенциальности дает уравнение на функцию $f(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{f(x, y)y}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x, y)x}{\rho}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y) = -f(x, y).$$

Введем для сокращения записи обозначение для частных производных $\partial_x = \partial/\partial x$ и аналогично для любых других аргументов. Дифференциальный оператор $x\partial_x + y\partial_y$ можно переписать в терминах производной по ρ, пользуясь стандартным "цепным правилом" вычисления операции дифференцирования при заменах переменных:

$$\partial_\rho = \partial_\rho x\, \partial_x + \partial_\rho y\, \partial_y = \frac{1}{\rho}\,(x\partial_x + y\partial_y).$$

Здесь мы учли, что в полярных координатах $\partial_\rho x = \cos\phi = x/\rho$ и аналогично $\partial_\rho y = y/\rho$. Таким образом, уравнение для функции f переписывается в виде:

$$\rho\, \partial_\rho f = -f. \tag{1}$$

Это уравнение в полярных координатах легко решается (сохраним для решениия $f(\rho, \phi)$ то же обозначение f):

$$f = \frac{s(\phi)}{\rho} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F} = \frac{s(\phi)}{\rho}\,\vec{e}_\phi,$$

где $s(\phi)$ пока произвольная гладкая функция угловой координаты.

Однако мы хотим, чтобы наше решение для f задавало бы гладкое векторное поле $\vec{F}$ в плоскости $\mathbb{R}^2$ с выколотым началом координат (в точке $\rho = 0$ наша сила не определена), и при этом сила $\vec{F}$ была бы потенциальной, то есть, ее работа при перемещении из любой начальной точки P_1 в любую конечную точку P_2 не зависела бы от траектории, соединяющей начальную и конечную точку.

Требование гладкости поля $\vec{F}$ накладывает на $s(\phi)$ очевидное условие 2π-периодичности: $s(\phi + 2\pi) = s(\phi)$, а независимость работы от траектории эквивалентна нулевой работе по любому замкнутому контуру. Если замкнутый контур *не охватывает* начало координат, то это свойство гарантировано локальным условием потенциальности (1) в силу леммы Пуанкаре.

А вот для замкнутых контуров, охватывающих начало координат, равенстово нулю работы нужно накладывать отдельно, как дополнительное ограничение на функцию $s(\phi)$. Очевидно, достаточно потребовать нулевой работы нашей силы $\vec{F}$ вдоль окружности $\rho = \text{const}$ (например, $\rho = 1$):

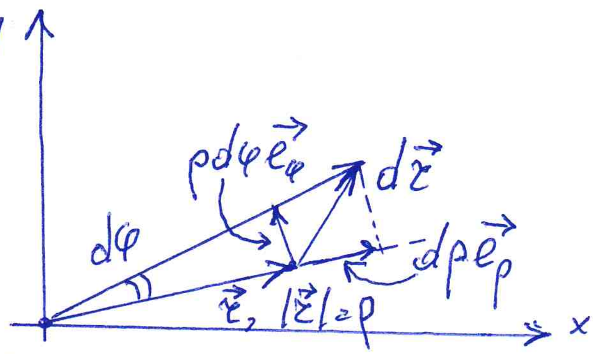
$$\int_{\rho=1} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} s(\phi) d\phi = 0.$$

Равенство нулю интеграла по ϕ и есть второе условие (помимо периодичности), накладываемое на функцию $s(\phi)$.

Отметим, что для вычисления один-формы элементарной работы $\vec{F}d\vec{r}$ нам потребовалось выражение $d\vec{r}$ в полярных координатах:

$$d\vec{r} = d\rho\, \vec{e}_\rho + \rho\, d\phi\, \vec{e}_\phi.$$

Это выражение можно получить прямым вычислением из декартового представления $d\vec{r} = dx\, \vec{e}_x + dy\, \vec{e}_y$ (дифференцируя формулы для x и y в полярных координатах и пользуясь связью ортов полярной и декартовой систем координат), но можно увидеть его сразу из простых геометрических соображений (см. рисунок ниже).



Получим теперь выражения для кинетической энергии частицы и условия потенциальности силы в цилиндрических и сферических координатах пространства $\mathbb{R}^3$.

Цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$

Цилиндрические координаты задаются полярными координатами (ρ, ϕ) в плоскости xOy $(z = 0)$ и координатой z вдоль оси, перпендикулярной этой плоскости:

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z, \qquad \vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z. \tag{2}$$

Переход к цилиндрическим координатам сингулярен в точках оси Oz (якобиан замены ρ стремится к нулю при приближении к точкам оси Oz).

Пользуясь выражениями для производных по времени от ортов цилиндрической системы

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot\phi\,\vec{e}_\phi, \qquad \dot{\vec{e}}_\phi = -\dot\phi\,\vec{e}_\rho, \qquad \dot{\vec{e}}_z = 0,$$

получаем фомулу для вектора скорости в цилиндрических координатах:

$$\dot{\vec{r}} = \dot\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot\phi\,\vec{e}_\phi + \dot z\,\vec{e}_z.$$

Так как цилиндрическая система задается ортонормированными базисными векторами, выражение для кинетической энергии будет зависеть только от квадратов производных цилиндрических координат (не будет смешанных произведений):

$$T = \frac{m\,(\dot{\vec{r}})^2}{2} = \frac{m}{2}\,(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2 + \dot z^2).$$

Заметим, что эту формулу можно получить из кинетической энергии в декартовых координатах

$$T = \frac{m}{2}\,(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2),$$

подставив соответствующие выражения (2) и выразив производные от декартовых координат в терминах производных от цилиндрических координат.

Рассмотрим теперь силовое поле $\vec{F}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ и разложим его по ортам цилиндрической системы координат:

$$\vec{F} = F_\rho\,\vec{e}_\rho + F_\phi\,\vec{e}_\phi + F_z\,\vec{e}_z.$$

Для один-формы работы $\vec{F}d\vec{r}$ нам необходимо выражение $d\vec{r}$ в цилиндрических координатах. Оно сразу следует из формулы для вектора скорости:

$$d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\,dt = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\phi\,\vec{e}_\phi + dz\,\vec{e}_z.$$

Помня об ортонормированности базисных векторов цилиндрической системы, приходим к окончательному выражению для один-формы работы силы в цилиндрических координатах:

$$\vec{F}d\vec{r} = F_\rho\, d\rho + \rho F_\phi\, d\phi + F_z dz.$$

В отличие от декартовой системы, один-форма работы *не равна* сумме произведений компонет силы и соответствующих дифференциалов координат (обратите внимание на второе слагаемое).

Пусть сила $\vec{F}$ потенциальна и тогда один-форма работы точна:

$$\vec{F}d\vec{r} = -dU$$

для некоторой дифференцируемой функции $U(\rho, \phi, z)$, заданной в пространстве $\mathbb{R}^3$. Записывая это равенство в явном виде, получаем выражения компонент силы в цилиндрических координатах через частные производные потенциальной энергии U:

$$F_\rho\, d\rho + \rho F_\phi\, d\phi + F_z dz = -(\partial_\rho U d\rho + \partial_\phi U d\phi + \partial_z U dz) \quad \Rightarrow$$

$$F_\rho = -\frac{\partial U}{\partial \rho}, \qquad F_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \phi}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Необходимые условия потенциальности произвольной силы $\vec{F}$ получаются из приведенных выше выражений путем приравнивания вторых смешанных производных потенциальной энергии U:

$$\frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} = \frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho}, \qquad \frac{\partial F_\rho}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial \rho}, \qquad \frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial \phi}.$$

Обратите внимание, что компонента F_ϕ входит в эти соотношения с множителем ρ.

В заключение получим формулу для векторного оператора градиента $\vec{\nabla}$ в цилиндрических координатах. По определению, векторный дифференциальный оператор градиента задается соотношением

$$d\Phi = (\vec{\nabla}\Phi, d\vec{r}),$$

где скобки обозначают скалярное произведение, а Φ — произвольная дифференцируемая функция.

Например, в декартовых координатах, записывая $\vec{\nabla}$ в виде разложения по базисным ортам

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \nabla_x + \vec{e}_y \nabla_y + \vec{e}_z \nabla_z$$

и учитывая выражения для $d\vec{r}$ и $d\Phi$, получаем хорошо известный ответ:

$$\nabla_x = \partial_x, \qquad \nabla_y = \partial_y, \qquad \nabla_z = \partial_z.$$

В цилиндрических координатах $\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \nabla_\rho + \vec{e}_\phi \nabla_\phi + \vec{e}_z \nabla_z$, и приравнивая скалярное произведение $(\vec{\nabla}\Phi, d\vec{r})$ и $d\Phi$

$$(\vec{\nabla}\Phi, d\vec{r}) = \nabla_\rho \Phi d\rho + \nabla_\phi \Phi \rho\, d\phi + \nabla_z \Phi dz = \partial_\rho \Phi d\rho + \partial_\phi \Phi d\phi + \partial_z \Phi dz = d\Phi$$

получаем выражение для компонент оператора градиента в цилиндрических координатах:

$$\nabla_\rho = \frac{\partial}{\partial \rho}, \qquad \nabla_\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}, \qquad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Отметим, что компоненты градиента уже не являются просто частными производными по цилиндрическим координатам. Коэффициент при частной производной по цилиндрической координате обратен коэффициенту при соответствующем дифференциале в $d\vec{r}$:

$$d\vec{r} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \underline{\rho\,d\phi}\,\vec{e}_\phi + dz\,\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} = \vec{e}_\rho\partial_\rho + \vec{e}_\phi\underline{\rho^{-1}}\,\partial_\phi + \vec{e}_z\partial_z.$$

Сферические координаты в $\mathbb{R}^3$

Сферические координаты (r, θ, ϕ) задаются соотношениями

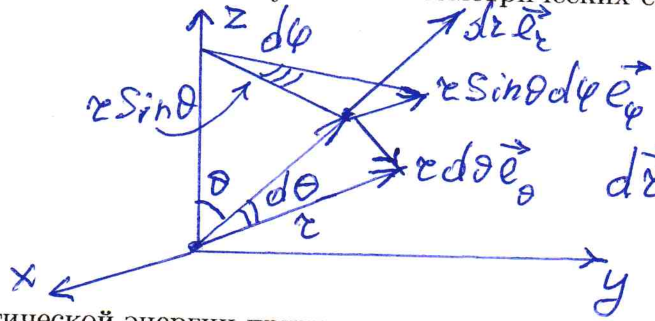
$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta, \qquad \vec{r} = r\,\vec{e}_r.$$

Эта замена также вырождается в точках оси Oz.

Дифференцируя по времени вектор $\vec{r}$, получаем формулу вектора скорости в сферических координатах:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi.$$

Здесь мы воспользовались формулой $\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi$ (см. Домашнее задание 1, задача 6). Это же выражение можно получить из геометрических соображений:



$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$$

Формула для кинетической энергии принимает вид:

$$T = \frac{m\,(\dot{\vec{r}})^2}{2} = \frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2).$$

Поскольку

$$d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\phi\,\vec{e}_\phi,$$

то для произвольной силы $\vec{F} = F_r\,\vec{e}_r + F_\theta\,\vec{e}_\theta + F_\phi\,\vec{e}_\phi$ один-форма работы принимает вид:

$$\vec{F}d\vec{r} = F_r dr + rF_\theta d\theta + r\sin\theta F_\phi d\phi.$$

Для потенциальной силы эта форма точна $\vec{F}d\vec{r} = -dU$ и компоненты силы $\vec{F}$ выражаются через частные производные потенциальной энергии:

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \qquad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}, \qquad F_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\phi}.$$

Эти соотношения позволяют выписать необходимые условия потенциальности произвольной силы в сферических координатах (снова приравниваем вторые смешанные производные потенциальной энергии):

$$\frac{\partial F_r}{\partial\theta} = \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}, \qquad \frac{\partial F_r}{\partial\phi} = \frac{\partial(r\sin\theta F_\phi)}{\partial r}, \qquad \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial\phi} = \frac{\partial(r\sin\theta F_\phi)}{\partial\theta}. \tag{3}$$

В последнем равенстве можно сократить множитель r.

Оператор градиента строится аналогично предыдущему случаю, коэффициенты при частных производных обратны коэффициентам при соответствующих дифференциалах в $d\vec{r}$:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \nabla_r + \vec{e}_\theta \nabla_\theta + \vec{e}_\phi \nabla_\phi = \vec{e}_r\, \partial_r + \vec{e}_\theta\, r^{-1} \partial_\theta + \vec{e}_\phi\, (r \sin\theta)^{-1} \partial_\phi.$$

Пример 2. Компоненты векторного силового поля заданы в сферических координатах пространства $\mathbb{R}^3$:

$$F_r = 2r^\alpha \sin^{2\alpha}(\theta) \sin^2(\phi), \qquad F_\theta = r \sin(2\theta) \sin^{2\alpha}(\phi), \qquad F_\phi = r^\alpha \sin(\theta) \sin(2\phi),$$

где α — вещественный параметр. Определите, при каком значениии параметра эти выражения задают потенциальное силовое поле и найдите соответствующую потенциальную энергию $U(r, \theta, \phi)$. Для потенциального случая определите работу сил поля вдоль прямолинейного отрезка с начальной точкой $P_1 = (1, 0, 1)$ и конечной точкой $P_2 = (1, 1, 1)$, координаты точек *декартовы*.

Решение. Проверяем три необходимых условия потенциальности (3):

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} = \frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad 4\alpha r^\alpha \sin^{2\alpha-1}(\theta) \cos(\theta) \sin^2(\phi) = 4r \sin(\theta) \cos(\theta) \sin^{2\alpha}(\phi).$$

Это условие выполняется тождественно, если $\alpha = 1$.

Теперь надо убедиться, что оставшиеся условия потенциальности тоже выполняются при этом значении α.

$$\frac{\partial F_r}{\partial \phi} = \frac{\partial (r \sin\theta F_\phi)}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad 4r^\alpha \sin^{2\alpha}(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi) = 2(\alpha + 1) r^\alpha \sin^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi),$$

При $\alpha = 1$ это равенство обращается в тождество. Последнее условие потенциальности:

$$\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial \phi} = \frac{\partial (r \sin\theta F_\phi)}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad 2\alpha r^2 \sin(2\theta) \sin^{2\alpha-1}(\phi) \cos(\phi) = 2r^{\alpha+1} \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(2\phi).$$

также тождественно выполняется для $\alpha = 1$.

Напомним, что всегда нужно проверять *все три* необходимые условия потенциальности, даже если параметры задачи уже определились на первых шагах. Вполне может оказаться, что не все найденные значения параметров годятся для удовлетворения всех условий потенциальности. Это означает, силовое поле будет потенциальным только при некоторых (или вообще ни при каких) значениях параметров.

Итак, для $\alpha = 1$ выполнены необходимые условия потенциальности. Найдем потенциальную энергию. В качестве энергии U нам подходит дифференцируемая функция сферических координат, и, следовательно, эта функция с необходимостью должна быть 2π-периодична по координате ϕ.

$$-\frac{\partial U}{\partial r} = F_r = 2r \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) \quad \Rightarrow \quad U = -r^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + \Phi(\theta, \phi).$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = F_\theta = r \sin(2\theta) \sin^2(\phi) = -2r \sin(\theta) \cos(\theta) \sin^2 \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0.$$

Таким образом, произвольная дифференцируемая функция $\Phi(\theta, \phi)$ может зависеть только от координаты ϕ. Вычисление третьей компонеты силы показывает, что от ϕ эта функция тоже не зависит и, следовательно, является (несущественной) константой:

$$-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi} = F_\phi = r\sin(\theta)\sin(2\phi) = 2r\sin(\theta)\sin(\phi)\cos(\phi) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 0.$$

Таким образом, для потенциальной энергии имеем следующее выражение:

$$U(r, \theta, \phi) = -r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\phi).$$

И, наконец, для вычисления работы нужно только знать значения потенциальной энергии в начальной и конечной точках, конкретная траектория не важна:

$$A_{P_1\to P_2} = U(P_1) - U(P_2).$$

Таким образом, задача свелась к выражению декартовых координат точек P_1 и P_2 через сферические:

$$P_1 = (1, 0, 1) \quad \Rightarrow \quad r_1 = \sqrt{2},\ \theta_1 = \pi/4,\ \phi_1 = 0 \ \Rightarrow\ U(P_1) = 0.$$

$$P_2 = (1, 1, 1) \quad \Rightarrow \quad r_2 = \sqrt{3},\ \sin(\theta_2) = \sqrt{2/3},\ \phi_2 = \pi/4 \ \Rightarrow\ U(P_2) = -1.$$

Итак, искомая работа $A_{P_1\to P_2} = 1$.