

Механика 2023

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 3

Срок сдачи задания: до конца дня **27.02.23**

1. Компоненты силы \vec{F} заданы в сферических координатах r , θ и ϕ на \mathbb{R}^3 :

$$F_r = -2r \cos \phi \sin 2\theta, \quad F_\theta = -2r \cos \phi (1 + \alpha \sin^2 \theta), \quad F_\phi = -\alpha r \cos \theta \sin \phi,$$

где α — вещественный параметр. Определите, при каких значениях α сила потенциальна, и найдите соответствующую функцию потенциальной энергии.

2. Компоненты силы \vec{F} заданы в цилиндрических координатах ρ , ϕ и z на \mathbb{R}^3 :

$$F_\rho = \rho X(z) \cos \phi, \quad F_\phi = \rho Y(\phi) e^{-z^2}, \quad F_z = V(\rho, \phi) z e^{-z^2},$$

где X , Y и V — произвольные гладкие функции.

а) При каких X , Y и V выполнены необходимые условия потенциальности \vec{F} ? Найдите общее решение.

б) Определите вид потенциальной силы \vec{F} , если дополнительно заданы граничные условия:

$$\vec{F}|_{\rho=0} = 0 \quad (\text{на оси } O\vec{z}), \quad F_\rho|_{\phi=z=0} = \rho \quad (\text{на оси } O\vec{x}).$$

Постройте соответствующую функцию потенциальной энергии и проверьте достаточные условия потенциальности.

3. В цилиндрических координатах пространства \mathbb{R}^3 компонента F_ϕ потенциальной силы \vec{F} имеет вид:

$$F_\phi = f(\rho, z) \cos \phi,$$

где $f(\rho, z)$ — гладкая функция. Определите наиболее общий возможный вид остальных компонент силы \vec{F} и вычислите соответствующий потенциал.

4*. Тангенциальное силовое поле в сферических координатах на \mathbb{R}^3 имеет вид:

$$\vec{F} = F_\theta \vec{e}_\theta + F_\phi \vec{e}_\phi.$$

Иными словами, в любой точке \mathbb{R}^3 вектор силы \vec{F} ортогонален радиус-вектору \vec{r} .

а) Приведите пример тангенциального поля, которое потенциально. Найдите общий вид тангенциальной потенциальной силы.

б) Существует ли потенциальное тангенциальное поле, которое в точках экватора сферы радиуса r (т.е. при $\theta = \pi/2$) имеет ненулевую компоненту $F_\phi(r)$, не зависящую от угла ϕ ?

5. Массивная частица движется без трения по поверхности кругового конуса

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

К частице прикреплена невесомая пружина коэффициент упругости которой равен κ . Второй конец которой свободно скользит по оси $O\vec{z}$, причем пружина остается перпендикулярной к оси $O\vec{z}$ при любых движениях частицы. Потенциальная энергия упругой деформации пружины дается формулой $U = \kappa \ell^2/2$, где ℓ — длина пружины. Силы тяжести в системе не действуют.

- а) Выбрав подходящие обобщенные координаты, составьте лагранжиан этой системы.
- б) Выпишите уравнения движения частицы (уравнения Эйлера-Лагранжа).
- в) Есть ли в системе сохраняющиеся величины — интегралы движения? Если есть, приведите их явный вид в выбранных обобщенных координатах.