Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений, весна 2023г.

Семинары 4-5

Теорема Нётер

1. Пусть потенциальная энергия для уравнения Ньютона в $\mathbb{R}^3$ инвариантна относительно вращений вокруг оси Oz. Найдите соответствующий первый интеграл из теоремы Нётер. Выведите закон сохранения момента импульса из инвариантности потенциала относительно любых вращений.

Следствия теоремы Штурма

Рассмотрим приведенное уравнение Штурма

$$\ddot{x} + q(t)x = 0. \tag{1}$$

Всюду предполагается, что $q(t)$ — непрерывная функция. Можно считать, что гладкая.

2. Докажите, что нули уравнения Штурма изолированы. В частности, если справа от нуля есть еще один ноль, то есть и *соседний справа* ноль.

3. Применяя теорему Штурма к уравнению (1), докажите, что если $q(t) < M^2$ на отрезке $[a, b]$, то расстояние между соседними нулями уравнения (1) на этом отрезке больше $\frac{\pi}{M}$. Если же $q(t) > m^2$ на отрезке $[a, b]$, то расстояние между соседними нулями уравнения (1) меньше $\frac{\pi}{M}$ и притом на любом подотрезке длины $\frac{\pi}{M}$ должен найтись ноль. В частности, если неравенство выполняется на луче или на всей числовой оси, то решение имеет бесконечное число нулей.

4. (a) Оцените число нулей ненулевого решения уравнения $\ddot{x} + (\sin t + 2)x = 0$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

(b) Оцените число нулей решения задачи Коши $\ddot{x} + (\sin t + \lambda)x = 0,\ x(0) = 0, x'(0) = 1$ на отрезке $[0, 1]$ при $\lambda > 0$.

5. Пусть $q(t) \leq 0$ на $[a, b]$. Докажите, что любое нетривиальное решение уравнения (1) имеет на $[a, b]$ не более одного нуля.

6. Пусть $q(t) > 0$ на $[a, b]$. Докажите, что между двумя соседними нулями нетривиального решения уравнения (1) лежит ровно одна точка экстремума.

Задача Штурма-Лиувилля

Рассмотрим задачу

$$\ddot{x} + (q(t) + \lambda)x = 0, \quad x(0) = 0,\ x(b) = 0\ (b > 0).$$

Значения λ, при которых задача имеет ненулевое решение, называются собственными значениями задачи Ш.-Л., а сами эти решения — собственными функциями.

7. Докажите, что собственные значения задачи Ш.-Л. однократны, т.е. соответсвующее собственному значению решение единственно с точностью до умножения на константу.

8. Обозначим $\varphi_\lambda(t)$ решение задачи Коши

$$\ddot{x} + (q(t) + \lambda)x = 0, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$$

Пусть при $\lambda = \lambda_0$ решение имеет ноль в точке $t_0 > 0$. Докажите, что в окрестности точки λ_0 определена C^1-гладкая функция $t(\lambda)$, такая что $t(\lambda_0) = t_0$ и $\varphi_\lambda(t(\lambda)) = 0$, т.е. при изменении параметра ноль решения выживает и гладко зависит от параметра.

9. Пусть в условиях предыдущей задачи у решения $\varphi_{\lambda_0}(t)$ есть два соседних нуля t_1, t_2. Докажите, что при малом изменении параметра их продолжения $t_1(\lambda), t_2(\lambda)$ остаются соседними нулями.

10. Докажите, что в условиях предыдущих двух задач при увеличении параметра λ нули смещаются влево.

11. Докажите, что j-й по счету (ноль в $t = 0$ считаем нулевым и нумеруем нули на положительной полуоси) ноль $t_j(\lambda)$ решения $\varphi_\lambda(t)$ стремится к $t = 0$ при $\lambda \to +\infty$.

12. Докажите, что собственные значения задачи Штурма-Лиувилля образуют строго возрастающую к бесконечности последовательность λ_n, а соответствующее λ_n решение имеет ровно n нулей на промежутке $(0, b]$.

Неформальное описание того, что происходит: при увеличении параметра λ нули решения задачи Коши на положительной полуоси приезжают с $+\infty$ и движутся налево. Когда очередной ноль проходит через b, мы получаем новое собственное значение и новую собственную функцию для задачи Штурма-Лиувилля.

Малые колебания и обмотки тора

13. Решите самостоятельно задачу 39 на стр. 273 в учебнике. В ней надо решить задачу Коши для двумерного уравнения малых колебаний и нарисовать соответствующую фазовую кривую.

14. Решите задачу 42 на стр. 273 в учебнике.

Некоторые из задач 39–46 будут обсуждаться на следующем семинаре.