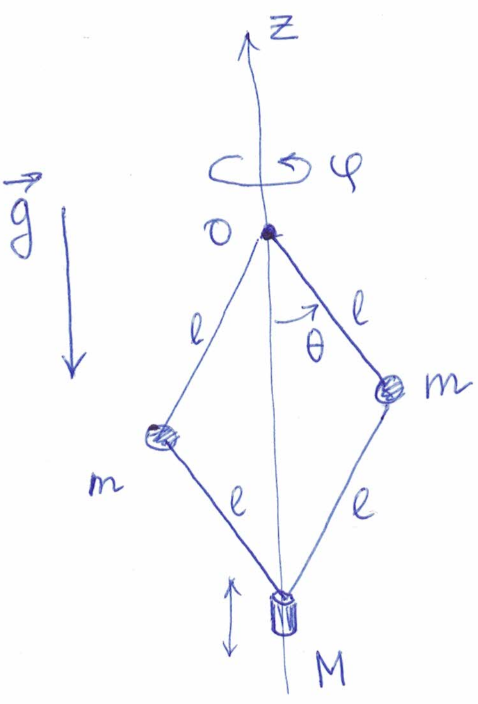
# Семинар 5

# Примеры составления лагранжианов и анализа движения механических систем

## 1 Регулятор Уатта (он же, Джеймс Ватт)

Rem: Первоначально центробежный регулятор был предложен первооткрывателем центробежной силы Христианом Гюйгенсом (Голландия) и использовался в ветреных мельницах для регулировки расстояния и давления между жерновами (XVII век). В 1788 году этот регулятор был адаптирован Джеймсом Ваттом (Шотландия) для регулировки давления пара в котлах паровых машин.




Модель регулятора Ватта состоит из 4-х (невесомых, жестких) стержней длины $l$. Стержни соединены шарнирами в ромб, концы стержней расположены в одной плоскости, одна вершина ромба закреплена в начале координат O, на двух соседних вершинах закреплены грузики массой m, на противолежащей вершине закреплена муфта массы M. Муфта может свободно двигаться вдоль оси $O\vec{z}$, грузики свободно вращаются вокруг оси $O\vec{z}$ (см. Рис.)

Вдоль оси $\vec{OZ}$ вниз действует однородная сила тяжести с ускорением $\vec{g}$.

Число степеней свободы системы $-$ 2, это углы $\theta$ и $\varphi$ (см. Рис.)

Конфигурационное пространство системы $-$ полусфера: $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi/2)$

Кинетическая энергия:

$$\boxed{T = \frac{M}{2}\Big(\underbrace{(2l\cos\theta)}\dot{\ }\Big)^2 + 2\cdot\underbrace{\frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \cancel{\dot{l}^2}\right)}}$$

координата муфты по оси $\vec{OZ}$

кинетическая энергия грузика $m$ в сферической системе координат. Учтена связь $l = \text{const}$

Rem: Кинетическая энергия системы $-$ величина аддитивная. Мы посчитали кин. энергии трех грузиков, составляющих систему, и сложили их.

Потенциальная энергия:

$$\boxed{U = Mg(-2l\cos\theta) + 2\cdot mg(-l\cos\theta)}$$

Координаты муфты $M$ и грузиков $m$ по оси $\vec{OZ}$ $-$ $(-2l\cos\theta)$ и $(-l\cos\theta)$, соответственно.

Rem: Потенциальная энергия системы тоже величина аддитивная. Она складывается из потенциальных энергий парных взаимодействий тел системы (в модели регулятора Уатта таких нет) и потенциальных энергий тел системы во внешнем силовом поле (поле тяжести в нашем случае).

Лагранжиан системы:

$$\boxed{L(\theta, \dot\varphi, \dot\theta) = T - U = (m + 2M\sin^2\theta)\,\ell^2\dot\theta^2 + m\ell^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 + 2(m+M)g\ell\cos\theta.}$$

Вообще говоря $L$, как функция на касательном расслоении конфигурационного пространства, может зависеть от координат $\varphi$, $\theta$ и скоростей $\dot\varphi$, $\dot\theta$.

В нашем случае зависимость $L$ от $\varphi$ отсутствует.

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

a) по переменной $\varphi$

$$(1a)\quad L_\varphi := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial\varphi}}_{=0} = \boxed{\frac{d}{dt}\left(2m\ell^2\sin^2\theta\,\dot\varphi\right) = 0}$$

Это уравнение легко интегрируется 1 раз по $t$ и даёт закон сохранения "обобщенного импульса", отвечающего переменной $\varphi$ (см. свойство С1 лагранжева формализма, лекция 5, стр. 13):

$$(1б)\quad \boxed{J := \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = 2ml^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi = \mathrm{const}}$$

"Физически" этот обобщённый импульс есть угловой момент вращения системы вокруг оси $\overrightarrow{OZ}$.

б) по переменной $\theta$:

$$(2)\quad L_\theta := \left(\frac{d}{dt}\circ\frac{\partial}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial}{\partial\theta}\right)L = \frac{d}{dt}\left(2l^2(m+2M\sin^2\theta)\dot\theta\right) - \left(2Ml^2\dot\theta^2 + ml^2\dot\varphi^2\right)\sin(2\theta) + 2(m+M)gl\sin\theta = 0$$

Это уравнение сложное. Искать его общее решение "в лоб" бессмысленно. Можно проанализировать наличие частного режима стационарного по $\theta$ движения: $\theta = \mathrm{const} = \theta_0$.

$$(3)\quad L_\theta\Big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \text{а значит } \dot\theta=\ddot\theta=0}} = -ml^2\dot\varphi^2\sin(2\theta_0) + 2(m+M)gl\sin\theta_0 = 0\,,$$

Случай $\sin\theta_0 = 0$ – неинтересный. В интересном случае $\theta_0 \neq 0$, решая стационарное уравнение (3) получаем соотношение между $\dot\varphi$ и $\theta$:

$$\boxed{\dot\varphi^2 = \frac{(m+M)g}{m\ell\cos\theta_0}}$$

Это стационарное решение ($\theta = \text{const}$, $\dot\varphi = \text{const}$) удовлетворяет и уравнению $L_\varphi$ (1а), причём значение обобщенного импульса $J$ (1б) для него фиксируется:

$$\boxed{J^2 = 4m^2\ell^4\sin^4\theta_0\,\dot\varphi^2 = \frac{4m(m+M)g\ell^3\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}}$$

---

Для качественного изучения всех движений системы удобно вместо уравнения $L_\theta = 0$ использовать ещё один закон сохранения —

закон сохранения энергии

(см. свойство С2 лагранжева формализма, Лекция 5, стр. 14)

Так как $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то

$$E = \underbrace{\dot\varphi\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} + \dot\theta\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - L}_{\text{общая формула для энергии}} = \underbrace{T + U}_{\text{частная формула, пригодная для нерелятивистской механики}} = \text{const}$$

У нас:

$$(4)\quad \boxed{E = (m + 2M\sin^2\theta)\ell^2\dot\theta^2 + m\ell^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 - 2(m+M)g\ell\cos\theta}$$

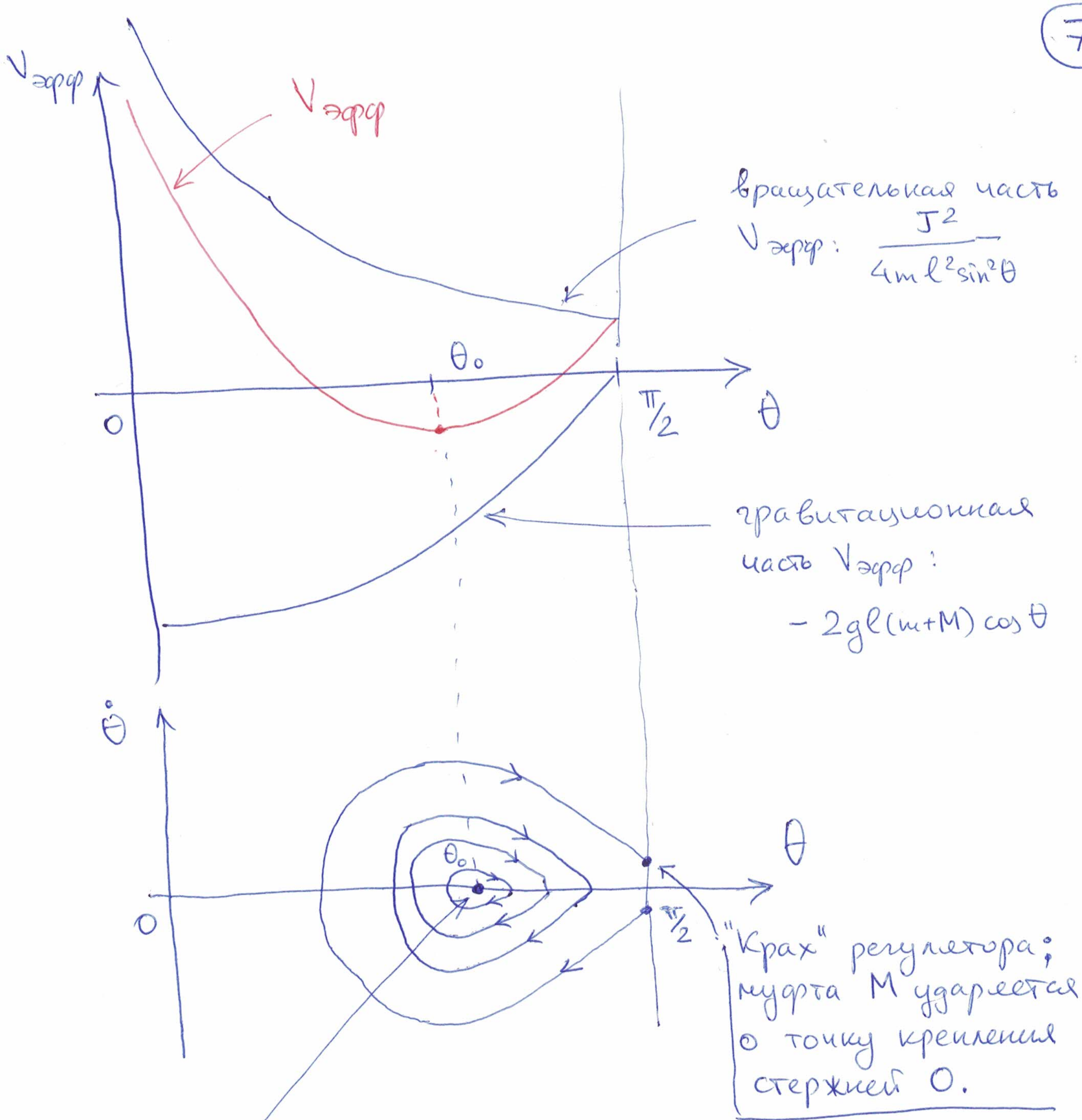
Rem: закон $E = \text{const}$ можно вывести из уравнения $L_\theta = 0$, домножив его на интегрирующий множитель $(m+2M\sin^2\theta)\dot\theta$ и проинтегрировав по $t$.

Для анализа закона сохранения энергии (4) подставим в него выражение для $\dot\varphi$ из закона сохранения углового момента (1б):

$$E = \underbrace{(m+2M\sin^2\theta)\,l^2\dot\theta^2}_{T_{эфф}(\theta,\dot\theta)} + \underbrace{\frac{J^2}{4ml^2\sin^2\theta} - 2(m+M)gl\cos\theta}_{V_{эфф.}(\theta)} = \text{const}$$

Это выражение выглядит как закон сохранения энергии для "эффективной" 1-мерной системы с координатой $\theta$, потенциальной энергией $V_{эфф}(\theta)$ и со специфической кинетической энергией $T_{эфф}(\theta,\dot\theta)$, зависящей не только от квадрата скорости $\dot\theta^2$, но и от координаты $\theta$ (эффективная масса частицы зависит от $\theta$).

Нарисуем фазовый портрет этой эффективной системы:




<u>Состояние устойчивого равновесия</u> $\theta=\theta_0$ определяется условием

$$\frac{d}{d\theta}V_{эфф}(\theta)=0 \iff J^2=\frac{4m(m+M)gl^3\sin^4\theta}{\cos\theta}$$

(проверьте)

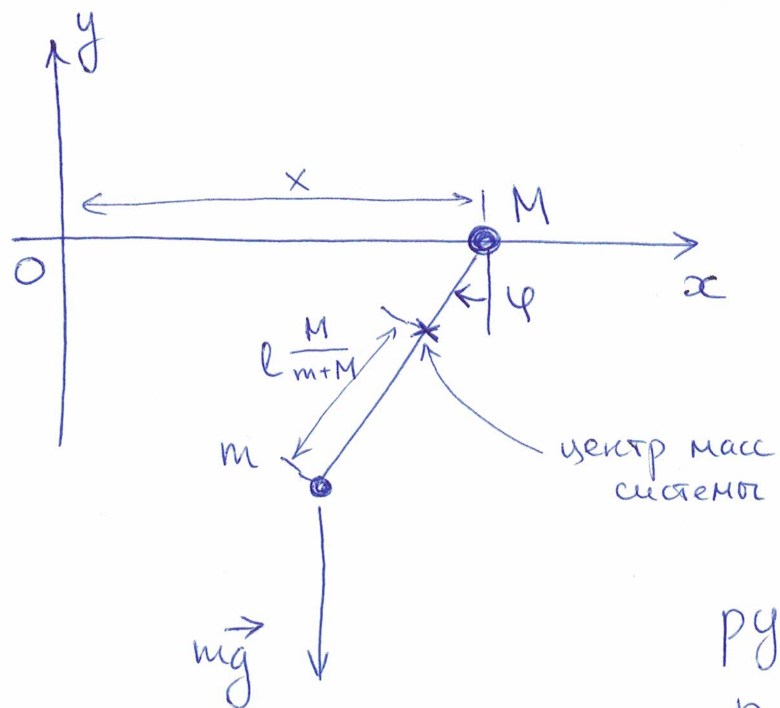
Это то самое стационарное по $\theta$ движение, которое мы анализировали на стр 4-5 (там это было сделано проще, чем тут)

В окрестности устойчивого равновесия $\theta=\theta_0$

фазовые траектории системы по $\theta$ – сплюснутые справа эллипсы. С ростом $\theta$ эффективная масса 1-мерной системы растёт: в окрестности $\theta = 0$ $m_{эфф} = 2m$, в окрестности $\theta = \pi/2$ $m_{эфф} = 2(m+2M)$.

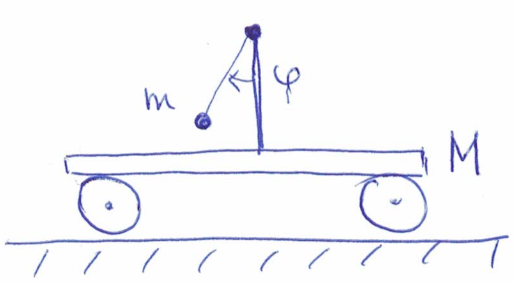
---

## 2 Эллиптический маятник




Две массы $m$ и $M$ соединены (невесомым, нерастяжимым) стержнем длины $l$. $M$ может свободно перемещаться вдоль оси $O\vec{x}$, $m$ вращается вокруг $M$ в плоскости $xOy$. Вдоль оси $O\vec{y}$ вниз действует однородная сила тяжести с ускорением $\vec{g}$.

Аналог:




---

Число степеней свободы системы – 2

Координаты – $x$ – позиция массы $M$ по оси $O\vec{x}$, $\varphi$ угол отклонения стержня от оси $\vec{Oy}$.

Конфигурационное пространство системы: $\mathbb{R}^1 \times S^1$.

$x \in (-\infty, +\infty)$; $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left\{ (\dot{(x + l\sin\varphi)})^2 + ((\dot{-l\cos\varphi}))^2 \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{T = \frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + ml\cos\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2}$$

Квадратичная форма скоростей $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$, но недиагональная.

Потенциальная энергия:

$$\boxed{U = -mgl\cos\varphi}$$

Выбранные координаты не оптимальны, поскольку кин. энергия $T$ в них не является диагональной квадратичной формой скоростей.

Вспомним, что в задаче 2-х тел (лекция 3) и в примере 1 лекции 5 (стр 5) мы переходили в систему центра масс. Это стоит делать всегда, когда набор взаимодействующих частиц (составных частей системы) движется без ограничений в пространстве

# Отступление о системе центра масс.

**Теорема о центре масс:**

Если система состоит из набора частиц $m_i, \vec{r}_i$ $\left( i=1\ldots n, \right)$ движущихся без внешних ограничений, то выбирая в качестве новых координат

$$\boxed{\vec{R} := \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$ — координаты центра масс системы

и

$$\boxed{\vec{s}_i := \vec{r}_i - \vec{R}}$$ — координаты частиц в системе центра масс,

получаем выражение для кинетической энергии системы

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} = \frac{M \dot{\vec{R}}^{2}}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{\vec{s}}_i^{\,2}}{2}},$$

где $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ — масса всей системы; $\vec{s}_i$ — не являются линейно независимыми: $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{s}_i = 0$.

---

Этот переход $\vec{r}_i \mapsto \vec{R}, \vec{s}_i$ полезен, когда потенциальная энергия взаимодействия частиц $\vec{r}_i$ (или жесткие связи между ними) зависят только от их положения друг относительно друга

---

В нашем примере удобно использовать координату центра масс системы по оси $O\vec{x}$:

$$\boxed{X = \frac{Mx + m(x + l\sin\varphi)}{M+m}}$$

Заменив $x \mapsto X$ получаем (проверьте):

$$\boxed{T = \frac{m+M}{2}\dot{X}^2 + \frac{ml^2}{2}\left(1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2}$$

форма кин. энергии диагонализовалась

**Лагранжиан:**

$$\boxed{L = T - U = \frac{m+M}{2}\dot{X}^2 + \frac{ml^2}{2}\left(1 \ \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi}$$

**Уравнения Эйлера-Лагранжа**

а) по переменной $X$:

$$L_X := \frac{d}{dt}\left((m+M)\dot{X}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(m+M)\dot{X} = \mathrm{const}}$$

закон сохранения импульса системы вдоль оси $\vec{Ox}$.

б) по переменной $\varphi$:

$$L_\varphi := ml^2\frac{d}{dt}\left(\left(1 \ \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}\right) - \frac{ml^2}{2}\frac{m}{m+M}\dot{\varphi}^2\sin(2\varphi)$$
$$+ mgl\sin\varphi = 0$$

Это уравнение сложное, вместо него лучше анализировать закон сохранения энергии, а из этого уравнения лишь извлечь информацию о стационарном по $\varphi$ решении:

$$\varphi = \varphi_0 = const$$

$$L_\varphi \Big|_{\substack{\varphi=\varphi_0 \\ \dot\varphi=\ddot\varphi=0}} = mgl\sin\varphi_0 = 0$$

$\Rightarrow$ имеется лишь две стационарных траектории $\boxed{\varphi = 0}$ и $\boxed{\varphi = \pi}$

---

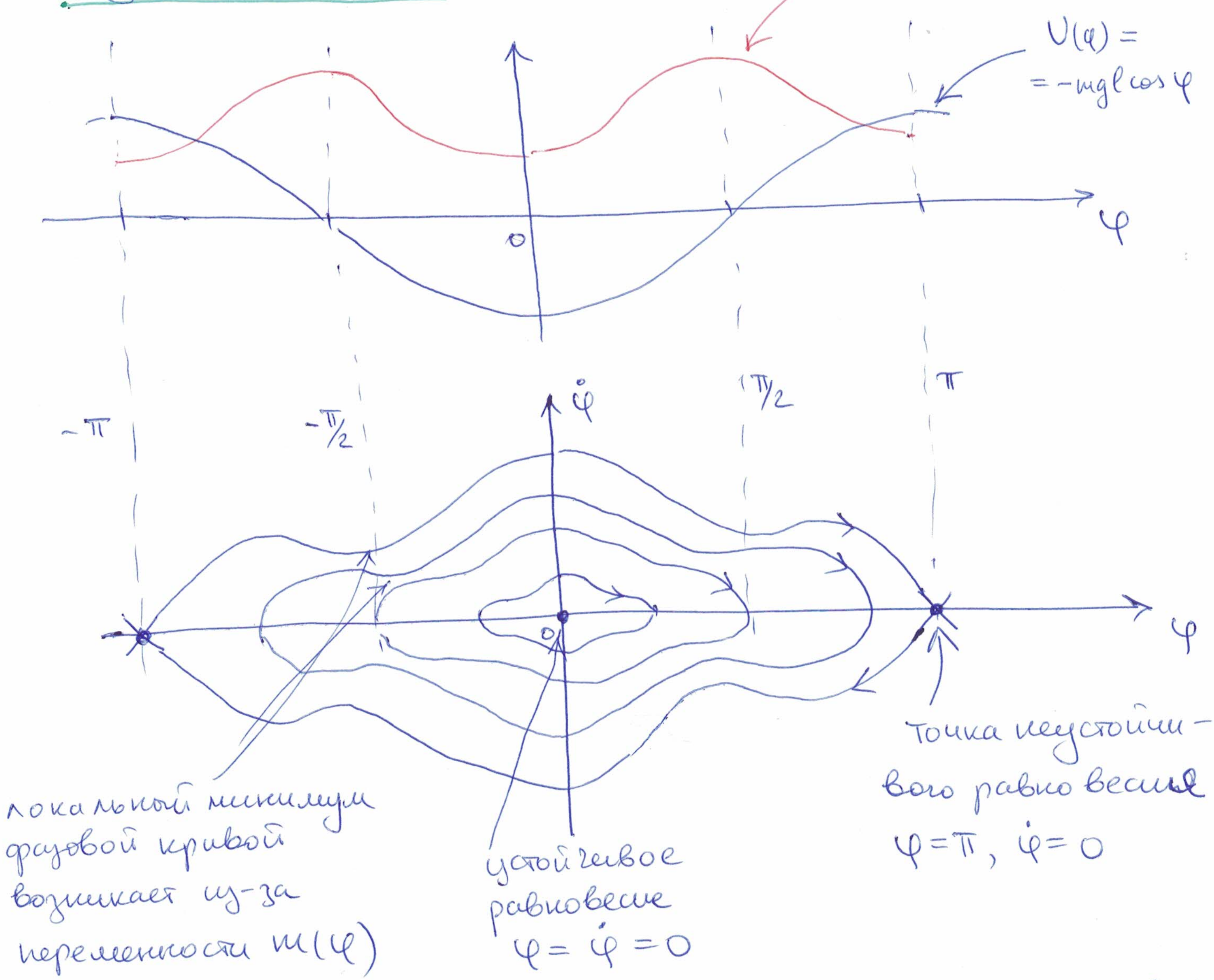
Т.к. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, имеем закон сохранения энергии:

$E = T + U = const$. Исключим из него кин. энергию движения центра масс по оси $\vec{Ox}$ (всё равно она - константа)

$$\mathcal{E} = E - \frac{m+M}{2}\dot{X}^2 = \boxed{\frac{ml^2}{2}\left(1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)\dot\varphi^2 - mgl\cos\varphi}$$

Это эффективная одномерная система, похожая на математический маятник, но только с переменной массой. $\boxed{m(\varphi) = m\left(1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)}$

# Фазовый портрет:




Точки равновесия – это те самые две стационарных (по $\varphi$) траектории движения, что мы получили на стр 12.

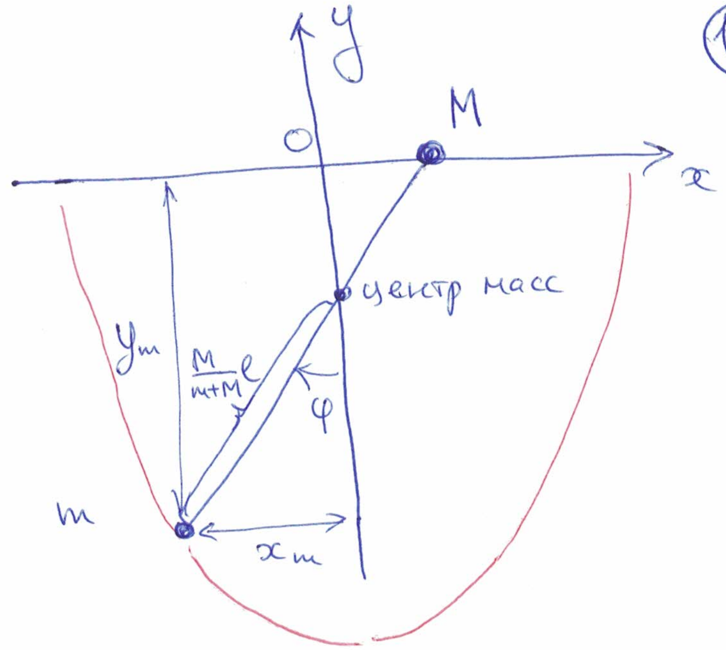
---

В заключение объясним название маятника: если перейти в систему центра масс (только) по оси $\vec{Ox}$, то координаты массы $m$ – $(x_m, y_m)$ имеют вид (см. Рис.)

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{M}{m+M}\, l \sin\varphi \\ y_m = -l\cos\varphi \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

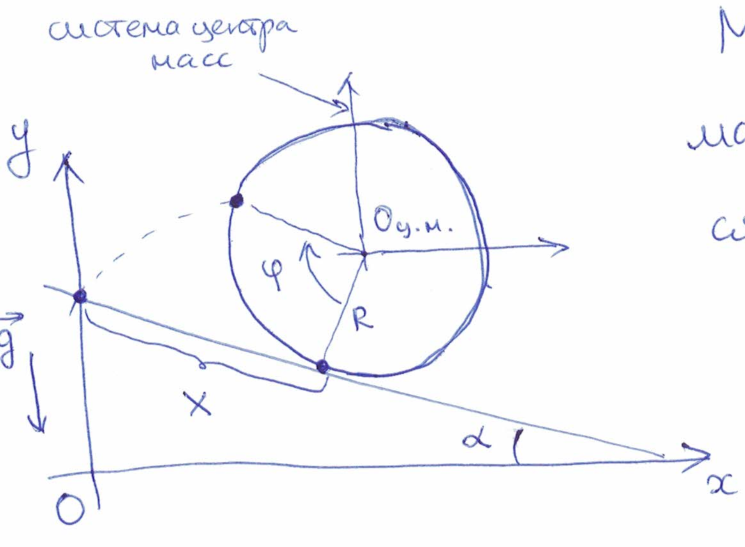
$$\boxed{\frac{x_m^2}{\left(\frac{M}{m+M}l\right)^2} + \frac{y_m^2}{l^2} = 1}$$




Частица m движется в этой системе по эллипсу с большой полуосью $l$ и малой полуосью $\frac{M}{m+M}l$.

---

## 3 Колесо, скатывающееся по наклонной плоскости.




Массивный однородный обод массы M и радиуса R скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости.

Угол наклона плоскости к горизонтали – α.

Вдоль оси $\vec{Oy}$ вниз действует однородная сила тяжести с ускорением $\vec{g}$.

Для подсчета кинетической энергии системы удобно перейти в систему центра масс. Её начало расположено в центре обода (следствие его однородности), а оси сонаправлены осям исходной ИСО (так определяется система центра масс).

По теореме о центре масс (см. стр 10)

$$T = T_{\substack{\text{центра}\\\text{масс}}} + T_{\substack{\text{относительного}\\\text{движения}}}$$

У нас $T_{\text{ц.м.}} = M\dfrac{\dot{x}^2}{2}$ (см. Рис.)

$$T_{\text{отн. движ}} = M\frac{(R\dot{\varphi})^2}{2}$$

это потому, что все точки обода вертятся вокруг центра масс по окружности радиуса R с угловой скоростью $\dot{\varphi}$.

В системе действует сила трения покоя (нет проскальзывания), которая обеспечивает связь x и φ:

$$x = R\varphi + const$$

С учётом связи получаем:

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{M\dot{x}^2}{2} = M\dot{x}^2$$

Потенциальная энергия однородного обода в поле тяжести

$$U = Mg\,y_{\substack{\text{центра}\\\text{масс}}} = -Mg\,x\sin\alpha + const$$

Лагранжиан системы:

$$\boxed{L = M\dot{x}^2 + mgx\sin\alpha}$$

## Уравнение Э.-Л.



$$L_{\dot{x}} := 2M\ddot{x} - mg\sin\alpha = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{g}{2}\sin\alpha}$$

Это ускорение в 2 раза ниже, чем было бы у обода, скатывающегося по наклонной плоскости без трения. Это эффект силы трения покоя — единственной силы трения, для которой подходит лагранжев формализм.

Эта сила трения просто "убивает" степени свободы. У нашего обода — одна степень свободы, а у скользящего обода их было бы две.