

## §2 Неприводимые представления $H_n(q)$

и спектр элементов Юнга-Мэри.

### Продолжение.

Нам остается убедиться, что

\* На пространствах  $V_\lambda$ ,  $\lambda \vdash n$  действительно реализуются представления  $H_n(q)$

\* Эти представления неприводимы

Для проверки первого утверждения заметим, что формулы (12), (14) из прошлой лекции задают действия артиковых генераторов  $g_i$  в базисе  $\{v_\lambda\}$  пр-ства  $V_\lambda$ .

Остается проверить выполнение соотношений на артиковых генераторах.

Введем удобные обозначения:

Def Базисированный генератор  $g_i(x)$ :

$$g_i(x) := g_i - \frac{q^x}{[x]_q} 1, \quad [x]_q := \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} \quad (26)$$

$\uparrow$   
 $q$ -числа Эйлера

Здесь  $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Rem: Вместо параметра  $x$  параметр  $u = q^x$ .

В таком случае  $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$u$  называют "спектральным параметром"

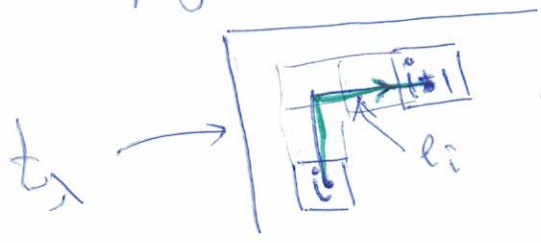
Def

Длиной ориентированного крюка между клетками  $[i]$  и  $[i+1]$  стандартной таблицы Юнга называется число  $l_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ :

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = q^{2l_i} \quad (27)$$

где  $a_i, a_{i+1}$  - содержащиеся в клетках  $[i], [i+1]$  в таблице:

На рисунке  $l_i$  - длина ломаной линии, измеренная в единицах размера клеток  $[*]$ :



$l_i > 0$ , если крюк ориентирован так: ,  $l_i < 0$ , если крюк ориентирован так:

В таких обозначениях мы можем переписать формулы (12), (14) так:

$$(14) \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \psi_{\beta_i \alpha} &= \frac{[l_i]_q}{[l_i+1]_q} g_i(l_i) \psi_\alpha, \text{ если } l_i \neq \pm 1. \end{aligned} \right. \quad (28)$$

(12)  $\leftrightarrow$  Если  $l_i = \pm 1$ , то  $\beta_i \alpha$  - не стандартная таблица, т.к. клетки  $[i]$  и  $[i+1]$  расположены

так  $\begin{bmatrix} i & i+1 \end{bmatrix}$  при  $l_i = 1$

или так  $\begin{bmatrix} i \\ i+1 \end{bmatrix}$  при  $l_i = -1$

$$\text{В этих случаях } \left\{ \begin{aligned} g_i(\pm 1) \psi_\alpha &= 0 \text{ или } g_i \psi_\alpha = \pm q^{\pm 1} \psi_\alpha \text{ при } l_i = \pm 1 \end{aligned} \right. \quad (29)$$

Здесь в (28) мы выбрали удобную <sup>от кошельковую</sup> нормировку базисных векторов  $V_\alpha$  и  $V_{-\alpha}$ , вставив в формулу множитель  $\frac{[l_i]_q}{[e_{i+1}]_q} \neq 0$  (см. наши условия 9)

Утверждение | Базисные генераторы удовлетворяют соотношениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_i(x) g_k(y) = g_k(y) g_i(x) \quad \forall |i-k| > 1 \quad (30a) \\ g_i(x) g_i(-x) = \frac{[x-1]_q [x+1]_q}{[x]_q^2} = \frac{[x]_q^2 - 1}{[x]_q^2} \mathbb{1} \quad (30b) \quad \text{унитарность} \\ g_i(x) g_{i+1}(x+y) g_i(y) = g_{i+1}(y) g_i(x+y) g_{i+1}(x) \quad (30c) \quad \text{уравнение Янга-Бакстера} \end{array} \right.$$


Набор этих соотношений при любых зафиксированных значениях параметров  $x, y \neq 0$  эквивалентен набору определяющих соотношений на артиковом генераторе  $H_n(q)$

Док-во: Коммутативность (30a) очевидна.

Проверим соотношения унитарности (30b):

$$\begin{aligned} g_i(x) g_i(-x) &= \left( g_i - \frac{q^x}{[x]_q} \mathbb{1} \right) \left( g_i + \frac{q^{-x}}{[x]_q} \mathbb{1} \right) = g_i^2 - \frac{q^x - q^{-x}}{[x]_q} g_i - \frac{1}{[x]_q^2} \mathbb{1} = \\ &= \left( 1 - \frac{1}{[x]_q^2} \right) \mathbb{1} \quad \left( 1 + (q - q^{-1}) g_i \right) \end{aligned}$$

Видно, что соотношения унитарности при  $\forall$  фикс.  $x$  эквивалентны соотношению Гейке:  $g_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) g_i$ .

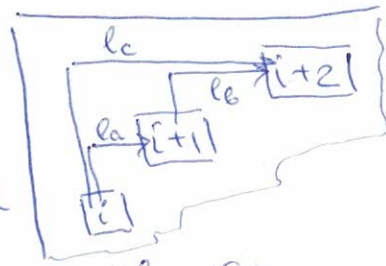
Проверка эквивалентности уравнений Янга-Бакстера соотношениям Кос (при условии, что соотношения коммутативности и Гейке выполняются) — задача 2-го листа 

Следствие: Формулы (28), (29) задают представление  $\pi_n(q)$  на базисных векторах  $V_\alpha$  пространства  $V_\lambda$  ( $\alpha$ -стандартные таблицы диаграммы  $\lambda \vdash n$ ).

Док-во: Достаточно проверить выполняющиеся соотношения (30a-b) на векторах  $V_\alpha$  при специально подобранных параметрах.

Пусть индекс  $\alpha$  вектора  $V_\alpha$  имеет вид:

Обозначим  $\left\{ \begin{array}{l} l_a - \text{длина крюка между } [i] \text{ и } [i+1] \\ l_b - \text{--- " --- между } [i+1] \text{ и } [i+2] \\ l_c = l_a + l_b \end{array} \right. V_\alpha$



$$\left\{ \begin{array}{l} q^{2l_a} = \frac{a_{i+1}}{a_i} \\ q^{2l_b} = \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}} \\ q^{2l_c} = \frac{a_{i+2}}{a_i} \end{array} \right.$$

В соответствии с (28) имеем:

$$g_i(l_a) V_\alpha = \frac{[l_a+1]_q}{[l_a]_q} V_{\sigma_{i\alpha}} \quad (31a)$$

$$g_{i+1}(l_b) V_{\sigma_{i\alpha}} = \frac{[l_b+1]_q}{[l_b]_q} V_{\sigma_{i+1}\sigma_{i\alpha}}$$

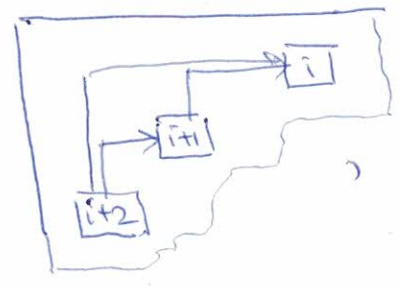
$$g_i(l_b) V_{\sigma_{i+1}\sigma_{i\alpha}} = \frac{[l_b+1]_q}{[l_b]_q} V_{\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i\alpha}}$$

$$g_{i+1}(l_b) V_\alpha = \frac{[l_b+1]_q}{[l_b]_q} V_{\sigma_{i+1}\alpha}$$

$$g_i(l_c) V_{\sigma_{i+1}\alpha} = \frac{[l_c+1]_q}{[l_c]_q} V_{\sigma_i\sigma_{i+1}\alpha}$$

$$g_{i+1}(l_a) V_{\sigma_i\sigma_{i+1}\alpha} = \frac{[l_a+1]_q}{[l_a]_q} V_{\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\alpha}$$

Так как  $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i\alpha} = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\alpha =$



заключаем:  $\left( g_i(l_b) g_{i+1}(l_a+l_b) g_i(l_a) - g_{i+1}(l_a) g_i(l_a+l_b) g_{i+1}(l_b) \right) V_\alpha = 0$

Таким образом мы доказали выполнение уравнений (5) Янга-Баштера на большинстве базисных векторов  $V_\alpha$  — на тех, в которых клетки  $[i]$ ,  $[i+1]$  и  $[i+2]$  не появляются в одном столбце или одной строке.

Для оставшихся векторов проверка происходит с использованием соотношений (29).


Для проверки соотношений унитарности используем (31) (см. стр 4) вместе с

$$g_i(-l_\alpha) V_{\sigma_i \alpha} = \frac{[-l_\alpha + 1]_q}{[-l_\alpha]_q} V_\alpha = \frac{[l_\alpha - 1]_q}{[l_\alpha]_q} V_\alpha \quad \text{— это соот-} \quad (31b)$$

ношение — реализация (28) для  $V_{\sigma_i \alpha}$ .

$$\text{Заключаем: } \left( g_i(-l_\alpha) g_i(l_\alpha) - \frac{[l_\alpha + 1]_q [l_\alpha - 1]_q}{[l_\alpha]_q^2} \right) V_\alpha = 0$$

для тех векторов  $V_\alpha$ , в индексе  $\alpha$  которых клетки  $[i]$  и  $[i+1]$  не появляются в одной строке или одном столбце.

Для оставшихся векторов при проверке соотношений унитарности применим (29) 

Осталось доказать неприводимость представлений  $V_\lambda$ .

Можно это сделать, проверив что  $\mathcal{P} V_\lambda \cong \text{End}(V_\lambda)$ ,

а точнее, построив изоморфизм всех матричных

единиц  $\mathbb{F}_\alpha \beta$  — базисных векторов  $\text{End}(V_\lambda)$  — в

представлении  $\mathcal{P} V_\lambda$ .

### § 3 Тождества в подалгебре Юнга-Мэри

6

#### Матричные единицы.


Подалгебра элементов JM конечномерна  $\Rightarrow$  генераторы  $J_i, i=1 \dots n$ , удовлетворяют некоторым полиномиальным тождествам, которые и характеризуют подалгебру JM.

Мы рассмотрим действие элементов  $J_i$  в пространстве

$$V_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda$$

Если мы устроимся затем, что в  $V_n$  реализуется точное представление  $H_n(q)$ , т.е., что  $\rho: H_n(q) \rightarrow V_n$  имеет свойство  $\text{Ker } \rho = 0$ , то полученные нами соотношения для  $J_i$ , действующих на  $V_n$  окажутся тождественно выполняющимися в  $H_n(q)$ .

Будем строить соотношения индуктивно по  $n$ , и рисовать картинку соотношений на узелке диаграмм Юнга

В  $H_1(q)$  :  $J_1 - 1 = 0 \iff$  

Клетка  $\boxed{1}$ , соответствующая  $J_1$ , попадает в угол квадрата с содержащим  $a_1 = 1$

В  $H_2(q)$ :  $(J_2 - q^2 1)(J_2 - q^{-2} 1) = 0$  — это соотношение Гекке. (32a) (7)

Клетку  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  в ряду с клеткой  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  мы можем разместить в одном из 2-х мест отмеченных звездочкой

1	*
*	

Содержание этих мест  $a_2 = q^2$  и  $a_2 = q^{-2}$ .

Прежде, чем перейти к рассмотрению  $H_3(q)$ , используем (32a) для построения идемпотентов в  $H_2(q)$

$$P_{\begin{bmatrix} 1 & * \\ 2 & \uparrow \end{bmatrix}} := \frac{J_2 - q^2 1}{q^2 - q^{-2}}, \quad P_{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ * & \uparrow \end{bmatrix}} := \frac{J_2 - q^{-2} 1}{q^2 - q^{-2}} \quad (33)$$

Крестик показывает, какой фактор из (32a) мы сохраним в правой части

В силу (32a) они обладают свойством ортогональности, и образуют кирсовское разложение единицы в  $H_2(q)$ :

$$P_{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}^2 = P_{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}, \quad P_{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ * & \uparrow \end{bmatrix}}^2 = P_{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ * & \uparrow \end{bmatrix}}, \quad P_{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} P_{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ * & \uparrow \end{bmatrix}} = P_{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ * & \uparrow \end{bmatrix}} P_{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} = 0$$

$$P_{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} + P_{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ * & \uparrow \end{bmatrix}} = 1 \quad (32b)$$

Набор соотношений (32b) эквивалентен (32a), при условии, что собственные значения  $J_2$  в (32a) все различны:  $q^2 \neq q^{-2}$ , т.е.  $q^4 \neq 1$  (а это наше ограничение на  $q$  при рассмотрении  $H_2(q)$ ).

Составление тождеству (32a) идемпотентов (33) соотношениями (32b) — стандартная процедура в ассоциативных алгебрах, при условии, что в (32a) нет одинаковых факторов.

В  $H_3(q)$  : Здесь мы переходим к построению соотношений не в алгебре  $H_3(q)$ , а в ее образе при действии на  $V_3 = V_{\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} 1 & & 1 \end{smallmatrix}}$  (8)

В зависимости от уже имеющейся конфигурации клеток  $\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$  и  $\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$ , мы можем кинуть клетку  $\begin{smallmatrix} 1 & & 1 \end{smallmatrix}$  в следующие позиции :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline * & & * \\ \hline \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline * \\ \hline \end{array}$$

Заметим, что  $P_{\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}}$  и  $P_{\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}} \in H_2(q) \subset H_3(q)$  — проекторы на подпространства векторов в базисе  $V_3$ , индексы которых имеют вид  $\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}$  и  $\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}$ , соответственно.

Поэтому на  $V_3$  имеем тождества:

$$\begin{cases} P_{\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}} (J_3 - q^4)(J_3 - q^{-2}) \equiv 0 \quad (\text{на } V_3) \\ P_{\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}} (J_3 - q^2)(J_3 - q^{-4}) = 0 \end{cases} \quad (34a)$$

Их можно переписать явно в терминах  $J_2, J_3$  :

$$\begin{cases} (J_2 - q^{-2})(J_3 - q^4)(J_3 - q^{-2}) = 0 \\ (J_2 - q^2)(J_3 - q^2)(J_3 - q^{-4}) = 0 \end{cases} \quad (\text{на } V_3) \quad (34b)$$

Тождествам (34a) (или (34b)) взаимнооднозначно сопоставляются идемпотенты :



$$P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \hline x \end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ \hline \end{smallmatrix}} \frac{(J_2 - q^{-2})}{q^4 - q^{-2}} ; \quad P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 & x \\ \hline 3 \end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ \hline \end{smallmatrix}} \frac{(J_2 - q^4)}{q^{-2} - q^4} ; \quad (9)$$

$$P_{\begin{smallmatrix} 1 & x \\ \hline 2 & 3 \end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix} 1 & \\ \hline 2 \end{smallmatrix}} \frac{(J_2 - q^2)}{q^{-4} - q^2} ; \quad P_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ \hline 2 & x \end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix} 1 & \\ \hline 2 \end{smallmatrix}} \frac{(J_2 - q^{-4})}{q^2 - q^{-4}} . \quad (35)$$

при условии, что все факторы в (34а,в) различные, т.е.,  $q^4 \neq q^{-2} \Leftrightarrow q^6 \neq 1$  (вдобавок к уже казавшему условию  $q^4 \neq 1$ ).

С использованием идемпотентов (35) соотношения (34а,в) переписываются в эквивалентном виде:

$$P_\alpha \cdot P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha, \quad \text{где } \alpha \in \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ \hline 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ \hline 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ \hline 2 \end{smallmatrix} \right\} \quad (\text{как } V_3) \quad (36)$$

$$P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{smallmatrix}} + P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ \hline 3 \end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ \hline \end{smallmatrix}}, \quad P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ \hline 3 \end{smallmatrix}} + P_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ \hline 2 \end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix} 1 & \\ \hline 2 \end{smallmatrix}} \Rightarrow \sum_{\alpha} P_\alpha = 1$$

Заметим также, что  $P_\alpha$  является "собственными векторами" элементов  $J_i$ : в силу тождеств (32а), (34) имеем

$$J_i P_\alpha = a_i P_\alpha = P_\alpha J_i, \quad (\text{как } V_3) \quad (37)$$

где  $a_i$  - содержимое клетки  $\square^i$  в стандартной таблице  $\alpha$

Вспомнивая, что как базисных векторах  $v_\alpha \in V_3$  мы также имеем  $J_i v_\alpha = a_i v_\alpha$  заключаем

$$P_\alpha V_3 = \mathbb{C} v_\alpha \quad - \text{идемпотенты } P_\alpha \quad (38a)$$

вырезают в  $V_3$  одномерные подпространства.

или, эквивалентно

$$P_\alpha \sigma_\beta = \delta_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \quad (\text{на } V_3) \quad (388)$$

То есть идемпотенты  $P_\alpha$  ведут себя так же при действии на  $V_3$ , как ведут себя диагональные матричные единицы  $E_{\alpha\alpha} \in \text{End}(V_3)$ , и соотношения для них такие же - см. (36), формулы в красных рамках.

Конструкции тождеств и идемпотентов  $P_\alpha, \alpha = t_\lambda, \lambda \vdash n$  продолжается индукцией по  $n$ . В качестве примера приведем тождества и идемпотенты на уровне

$$H_4(q) := V_{\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}}$$

$$P_{\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ * \end{smallmatrix}} : P_{\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}} (J_4 - q^6)(J_4 - q^{-2}) = 0 \quad \text{тождества}$$

$$P_{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ * \end{smallmatrix}} : P_{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}} (J_4 - q^2)(J_4 - q^{-6}) = 0 \quad (\text{на } V_4)$$

$$P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \\ * \end{smallmatrix}} : P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}} (J_4 - q^4)(J_4 - 1)(J_4 - q^{-4}) = 0$$

$$P_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \\ * \end{smallmatrix}} : P_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}} (J_4 - q^4)(J_4 - 1)(J_4 - q^{-4}) = 0$$

$$P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ * \end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}} \cdot \frac{(J_4 - q^{-2})}{q^6 - q^{-2}};$$

идемпотенты

$$P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 \end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}} \cdot \frac{(J_4 - q^6)}{(q^{-2} - q^6)}; \quad P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}} \cdot \frac{(J_4 - q^4)(J_4 - q^{-4})}{(1 - q^4)(1 - q^{-4})};$$

при условии  $q^8 \neq 0$   
(а также  $q^6 \neq 1, q^4 \neq 1$ )

$$P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 \end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}} \cdot \frac{(J_4 - 1)(J_4 - q^{-4})}{(q^4 - 1)(q^4 - q^{-4})}; \quad P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}} := P_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}} \cdot \frac{(J_4 - q^4)(J_4 - 1)}{(q^{-4} - q^4)(q^{-4} - 1)} \quad \text{и т.д.}$$

Действие этих идемпотентов на  $V_4$  совпадает с действием диагональных матричных единиц:

где  $e_\beta = t_\lambda$ , где  $\lambda \in \{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \}$ , т.е.  $\lambda \vdash 4$ :

$$P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha, \quad \sum_\alpha P_\alpha = 1 \quad (\text{на } V_4)$$

$$P_\alpha \sigma_\beta = \delta_{\alpha\beta} V_\alpha \quad (\text{как } E_{\alpha\alpha})$$

Сформулируем результат для произвольного  $n$ :

**Теорема 1:** Пусть  $q \neq \pm 1$ ,  $q^{2k} \neq 1 \quad \forall k: |k| \leq n$ . Рассмотрим представление  $V_n := \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda$  алгебры  $H_n(q)$ .

а) Для элементов  $J_n$  можно написать набор тождеств (или действий на  $V_n$ ), элементы которого нумеруются диаграммами Юнга  $\lambda \vdash n-1$ :

$$P_{t_\nu} \prod_{\{c\}} (J_n - a(c)) = 0 \quad (\text{на } V_n) \quad (39)$$

где  $\{c\}$  — набор всех позиций, на которых в диаграмме  $\lambda \vdash n-1$  можно поставить клетку  $\square_n$ , а  $a(c)$  — содержание клетки  $\square_n$  в позиции  $c$ . На картинке:



Эквивалентная формулировка

б) Для каждой стандартной таблицы  $t_\lambda$ ,  $\lambda \vdash n$  можно построить элемент

$$P_{t_\lambda} = P_{t_\lambda} \prod_{\substack{\{c\} \\ c \neq c_0}} \frac{(J_n - a(c))}{(a(c_0) - a(c))} \quad (40)$$

Здесь  $\lambda' \vdash (n-1)$ ,  $\lambda' \subset \lambda$ , а стандартная таблица (12)

$t_{\lambda'}$  получена из  $t_{\lambda}$  удалением клетки  $\boxed{n}$ ;

$\{c\}$  - набор всех позиций, на которые можно поместить клетку  $\boxed{n}$  в диаграмме  $\lambda' \vdash (n-1)$ ;  $a(c)$  - содержащая этих позиций;  $c_0$  - позиция, на которой стоит  $\boxed{n}$  в  $t_{\lambda}$ .

Элементы  $P_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \{t_{\lambda}, \lambda+n\}$  при действии на  $V_n$  выполняют роль диагональных матричных единиц  $E_{\alpha\alpha}$ :

$$P_{\alpha} P_{\beta} = \delta_{\alpha\beta} P_{\alpha}; \quad \sum_{\alpha} P_{\alpha} = 1; \quad P_{\alpha} U_{\beta} = \delta_{\alpha\beta} U_{\alpha} \quad (\text{на } V_n) \quad (41)$$

Реш Если избавиться в (39) от знаменателей, присутствующих в определении  $P_{t_{\lambda}}$ , то получившиеся полиномиальные тождества для  $T_i, i=1, \dots, n$ , верны в алгебре  $H_n(q)$  без ограничений на параметр  $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Займемся построением элементов  $H_n(q)$ , образ которых действуют в  $V_n$  как недиагональные матричные единицы  $E_{\alpha\beta}$ :

$$E_{\alpha\beta} U_{\gamma} = \delta_{\beta\gamma} U_{\alpha}$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  - стандартные таблицы, отвечающие одной и той же диаграмме  $\lambda+n$ ;  $\gamma$  - любая стандартная таблица из множества  $\{t_{\mu}, \mu: \mu+n\}$ .

Рассмотрим элемент  $g_i(l_a) P_{\beta}$ , где

$l_a$  - длина крюка между клетками  $\boxed{i}$  и  $\boxed{i+1}$  в стандартной таблице  $\beta$ :

$$\beta = \begin{array}{|c|} \hline \boxed{i+1} \\ \hline \boxed{i} \\ \hline \end{array}, \quad \frac{a_{i+1}}{a_i} = q^{2l_a}$$

Возьмем действие этого элемента на базисных векторах  $V_n$ :

$$g_i(l_a) P_\beta V_\gamma = \delta_{\beta\gamma} g_i(l_a) V_\beta \stackrel{(31a)}{=} \frac{[l_a+1]_q}{[l_a]_q} \delta_{\beta\gamma} V_{\sigma_i\beta}$$

Итак

$$\boxed{\frac{[l_a]_q}{[l_a+1]_q} g_i(l_a) P_\beta \leftrightarrow E_{\sigma_i\beta, \beta} \text{ (на } V_n)} \quad (42a)$$

↑  
недиаг. матр. единицы.

Есть и другое выражение для матричной единицы  $E_{\sigma_i\beta, \beta}$ :

Возьмем действие  $P_{\sigma_i\beta} g_i(-l_a)$  на базисных векторах

$V_n$ :

на  $V_\beta$

$$P_{\sigma_i\beta} g_i(-l_a) V_\beta = P_{\sigma_i\beta} \left\{ g_i(l_a) - \left[ \frac{q^{l_a}}{[l_a]_q} + \frac{q^{-l_a}}{[l_a]_q} \right] \right\} V_\beta =$$
$$\stackrel{(31a)}{=} P_{\sigma_i\beta} \frac{[l_a+1]_q}{[l_a]_q} V_{\sigma_i\beta} - (q - q^{-1}) \underbrace{P_{\sigma_i\beta}}_{0''} V_\beta = \frac{[l_a+1]_q}{[l_a]_q} V_{\sigma_i\beta}$$

на  $V_{\sigma_i\beta}$

$$P_{\sigma_i\beta} g_i(-l_a) V_{\sigma_i\beta} \stackrel{(31b)}{=} \frac{[l_a-1]_q}{[l_a]_q} P_{\sigma_i\beta} V_\beta = 0$$

на  $V_\gamma$  ( $\gamma \neq \beta, \sigma_i\beta$ )

смотри строчка  $\text{iii} \rightarrow \text{iv}$  в таблице X

$$P_{\sigma_i\beta} g_i(-l_a) V_\gamma = P_{\sigma_i\beta} (g_i(l_a) + \text{const} \cdot 1) V_\gamma =$$
$$= P_{\sigma_i\beta} (\text{const}_1 V_{\sigma_i\gamma} + \text{const}_2 V_\gamma) = 0$$

Итак, снова получаем:

$$\boxed{\frac{[l_a]_q}{[l_a+1]_q} P_{\sigma_i\beta} g_i(-l_a) \leftrightarrow E_{\sigma_i\beta, \beta} \text{ (на } V_n)} \quad (42b)$$

Теперь мы готовы доказать основной результат:

(14)

## Теорема 2 В условиях Теоремы 1

- \* отображение  $H_n(q) \rightarrow \text{End}(V_\lambda)$ , где  $V_\lambda$ ,  $\lambda \vdash n$ , — любая из компонент  $V_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda$ , является эндоморфизмом
- \* отображение  $H_n(q) \rightarrow \bigoplus_{\lambda \vdash n} \text{End}(V_\lambda)$  является изоморфизмом и, значит, представление  $V_n$ -точкой.
- \* соотношения (39), (41) из Теоремы 1, а также равенства

$$\begin{aligned} g_i(l_a) P_\alpha &= P_{\sigma_i \circ \alpha} g_i(-l_a), \text{ если } l_a \neq \pm 1 \\ g_i(\pm 1) P_\alpha &= P_\alpha g_i(\pm 1) = 0, \text{ если } l_a = \pm 1, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $l_a$  — длина прыжка между клетками  $\boxed{i}$  и  $\boxed{i+1}$  в  $\alpha$ .

выполняются в алгебре  $H_n(q)$

Формулы (40) и (43) порождают явную реализацию изоморфизма

$$H_n(q) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} \text{End}(V_\lambda)$$

\* Лемме Факта, сформулированное в § 1 относительно алгебр Гекке  $H_n(q)$  верно.

реализация изоморфизма

$$P_\alpha \leftrightarrow E_{\alpha\alpha}, \quad \frac{[l_a]_q}{[l_{a+1}]_q} g_i(l_a) P_\alpha = \frac{[l_a]_q}{[l_{a+1}]_q} P_{\sigma_i \circ \alpha} g_i(-l_a) \leftrightarrow E_{\sigma_i \circ \alpha, \alpha}$$

По первому пункту: Мы построили преобразов в  $H_n(q)$  для диагональных матричных единиц  $E_{\lambda\lambda} \in \text{End}(V_\lambda)$  и для некоторых кеглокальных  $E_{\lambda, \sigma_i \lambda}$ . Так как любую пару стандартных таблиц одной формы можно свести последовательностью перестановок клеток с соседними номерами  $(i, i+1)$ , то <sup>уже</sup> построенные матричные единицы порождают все остальные матричные единицы  $E_{\lambda\mu}$ . Однозначность определения  $E_{\lambda\mu}$  по его действию в базисе  $\{\sigma_\lambda\}$  гарантирует, что сюръекция  $H_n(q) \rightarrow \text{End}(V_\lambda)$  является изоморфизмом алгебр.

В качестве упражнения можно проверить, что соотношение  $E_{\lambda, \sigma_i \lambda} E_{\sigma_i \lambda, \lambda} = E_{\lambda\lambda}$  следует из (43) и (41).

По второму пункту.

Известный комбинаторный результат: алгоритм Родиксона - Шенстеда (Robinson-Schensted correspondence) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между элементами симметрической группы  $S_n$  и всевозможными парами стандартных таблиц  $\lambda \uparrow \mu$  одной и той же формы. Отсюда следует равенство

$$\sum_{\lambda \vdash n} \dim(\text{End}(V_\lambda)) = \sum_{\lambda \vdash n} (\dim V_\lambda)^2 = \# S_n = n!$$

Следствие первого пункта:  $\dim H_n(q) \geq \sum_{\lambda \vdash n} \dim(\text{End}(V_\lambda)) = n!$

Ранее мы доказали  $\dim H_n(q) \leq n!$ . Следовательно

$$\dim H_n(q) = \sum_{\lambda \vdash n} \dim \text{End}(V_\lambda) = n! \quad \text{— имеет изоморфизм.}$$

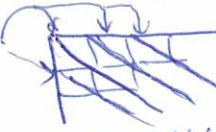

Формулы третьего пункта являются очевидными следствиями (16)  
(42 а, в), (39), (41) и точности представления  $V_n$

Из фактов об алгебре Гекке  $H_n(q)$ , приведенных в §1, первые три уже доказаны (в предыдущих пунктах этой теоремы и в последнем утверждении Теоремы 1 из 1-й части записок).

Остаётся убедиться в справедливости того, что  $Z(H_n(q))$  совпадает с суммой  $(J_1 \dots J_n)$ . Рассуждение аналогично доказательству пункта а) Утв. 4 из 1-й части записок.

Центр  $\bigoplus_{\lambda+n} \text{End}(V_\lambda)$  имеет линейный базис, состоящий из единичных операторов в каждом из пространств  $V_\lambda$ :  $Z(\bigoplus_{\lambda+n} \text{End}(V_\lambda)) = \text{Span}(\text{Id}_{V_\lambda}, \lambda+n)$ .

Эти единичные операторы  $\text{Id}_{V_\lambda}$  "размывают" пространства неприводимых представлений  $V_\lambda$ .

Но, как мы убедились в док-ве а) Утв 4 части 1 записок, симметрические полиномы от  $a_i, i=1 \dots n$ , размывают стандартные таблицы раз-ной формы  $\lambda$  (если только содержащая клеток, стоящих на разных диагоналях  в таблице раз-ной формы, а это следует из наших ограничений на  $q$ ).  
 $a_i \rightarrow$  собственные значения  $J_i$ , значит симм. полиномы  $J_i$  размывают пространства  $V_\lambda \Rightarrow$  они составляют весь центр 



Практический пример: как с помощью формул (31а, в) строить явно неприводимые представления.

Формулы (31а, в):

$$\begin{cases} g_i(l_a)\sigma_\alpha = \frac{[l_a+1]_q}{[l_a]_q} \sigma_{i, \alpha} \\ g_i(-l_a)\sigma_{i, \alpha} = \frac{[l_a-1]_q}{[l_a]_q} \sigma_\alpha \end{cases} \quad \begin{array}{l} l_a - \text{глубина криво} \\ \text{между } [i]_q \text{ и } [i+1]_q \\ \alpha. \\ l_a \neq \pm 1 \end{array}$$

Перепишем в виде:

$$\begin{cases} g_i \sigma_\alpha = \frac{q^{l_a}}{[l_a]_q} + \frac{[l_a+1]_q}{[l_a]_q} \sigma_{i, \alpha} \\ g_i \sigma_{i, \alpha} = -\frac{q^{-l_a}}{[l_a]_q} + \frac{[l_a-1]_q}{[l_a]_q} \sigma_\alpha \end{cases} \quad l_a \neq \pm 1 \quad (44a)$$

Добавим к ним формулы из Теоремы 1 1-й части замскок:

$$g_i \sigma_\alpha = \pm q^{\pm 1} \sigma_\alpha, \text{ если } l_a = \pm 1 \quad (44b)$$

Формулы (44а, в) задают действие артиновых генераторов  $H_n(q)$  в представлениях  $V_\lambda, \lambda \vdash n$ . Отметим, что матрица артиновых генераторов в базисе  $\{\sigma_\lambda\}$  состоит из 2x2 и 1x1 блоков, не более.

Пример:  $V_{\square\square}$  - трехмерное представление  $H_4(q)$

Базис  $\left\{ \sigma_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 4 \end{smallmatrix}}, \sigma_{\begin{smallmatrix} 124 \\ 3 \end{smallmatrix}}, \sigma_{\begin{smallmatrix} 134 \\ 2 \end{smallmatrix}} \right\}$ . Матрицы  $g_1, g_2, g_3$ :

$$g_1 \mapsto \begin{pmatrix} q & & \\ & q & \\ & & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}, \quad g_2 \mapsto \begin{pmatrix} q & & \\ & -\frac{q^{-2}}{[2]_q} & \frac{[3]_q}{[2]_q} \\ & \frac{1}{[2]_q} & \frac{q^2}{[2]_q} \end{pmatrix}, \quad g_3 \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{q^{-3}}{[3]_q} & \frac{[4]_q}{[3]_q} & 0 \\ \frac{[2]_q}{[3]_q} & \frac{q^3}{[3]_q} & \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

$$g_2 \sigma_{\begin{smallmatrix} 124 \\ 3 \end{smallmatrix}} = -\frac{q^{-2}}{[2]_q} \sigma_{\begin{smallmatrix} 124 \\ 3 \end{smallmatrix}} + \frac{1}{[2]_q} \sigma_{\begin{smallmatrix} 134 \\ 2 \end{smallmatrix}}$$

Реш: В предель  $q \rightarrow 1$  из представления  $H_n(q)$  (18)

получаем представление  $S_n$ .

В примере  $\forall \square$  получаем  $(g_i \xrightarrow{q \rightarrow 1} \sigma_i)$ .

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Замечательно, что в выборочной базе представление  $S_n$  определено не только над  $\mathbb{C}$ , но и над полями  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{Q}$ .

Другие конечные/конечномерные факторы в  $V_n / \mathbb{C}[V_n]$ .

Рассмотрим  $V_3$ . Для получения конечной фактор-группы в ней можно накладывать следующего вида соотношения на артиновы генераторы

$$v_1^p = 1, \quad p = 2, 3, 4, 5, \dots \quad (1)$$

При  $p=6$  фактор-группа останется бесконечной.

Обсудим следующий после  $p=2$  (т.е.  $S_3$ ) случай:  $p=3$ .

Фактор-группа  $BT_3 = V_3 / \langle v^3 \rangle$  - группа порядка 24,

называемая двойной группой тетраэдра (binary tetrahedral group). Она имеет центр порядка 2.

Фактор-группа  $BT_3 / Z(T_3) \cong A_4$  - подгруппа четных перестановок в  $S_4$ . Ее порядок - 12.  $A_4$  - группа симметрий тетраэдра (отсюда происходит название  $BT_3$ )

$BT_3$  также изоморфна группе  $SLF(2,3)$  - группе  $2 \times 2$  матриц с  $\det = 1$  и коэффициентами из поля  $F_3$  ( $\text{char } F_3 = 3$ ).

Эти сведения почерпнуты из книги Коксетер, Мозер "Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп" Москва "Наука", 1980.

Перейдем в  $\mathbb{C}[V_3]$  и "продеформируем" соотношение (1) следующим образом:

$$\underline{(v_1 - u_1)(v_1 - \sigma_1)(v_1 - \omega_1) = 0} \quad (2) \quad (20)$$

где  $u, \sigma, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  и попарно различны.

Фактор-алгебра  $\mathbb{C}[B_3] / \langle (2) \rangle$  имеет размерность 24 и в ситуации общего положения её "параметров" она полупроста и изоморфна  $\mathbb{C}[B_3]$ .

В её коммутативной подалгебре Юнга-Моргана, порождаемой  $J_2$  и  $J_3$ , выполняются соотношения:

$$\underline{(J_2 - u^2)(J_2 - \sigma^2)(J_2 - \omega^2) = 0} \quad (3a)$$

и 3 соотношения с участием  $J_3$ :

$$\underline{(J_2 - u^2)(J_2 - \sigma^2)(J_3 - u^2\sigma^2)(J_3 - \omega^4)(J_3 + u^3\omega)(J_3 + \sigma^3\omega) = 0} \quad (3b)$$

и ещё 2 соотношения, получаемые из (3b) циклической перестановкой  $\begin{matrix} u \rightarrow \sigma \\ \sigma \rightarrow \omega \\ \omega \rightarrow u \end{matrix}$ .

(3a) элементарно следует из (2). Простого вывода (3b)

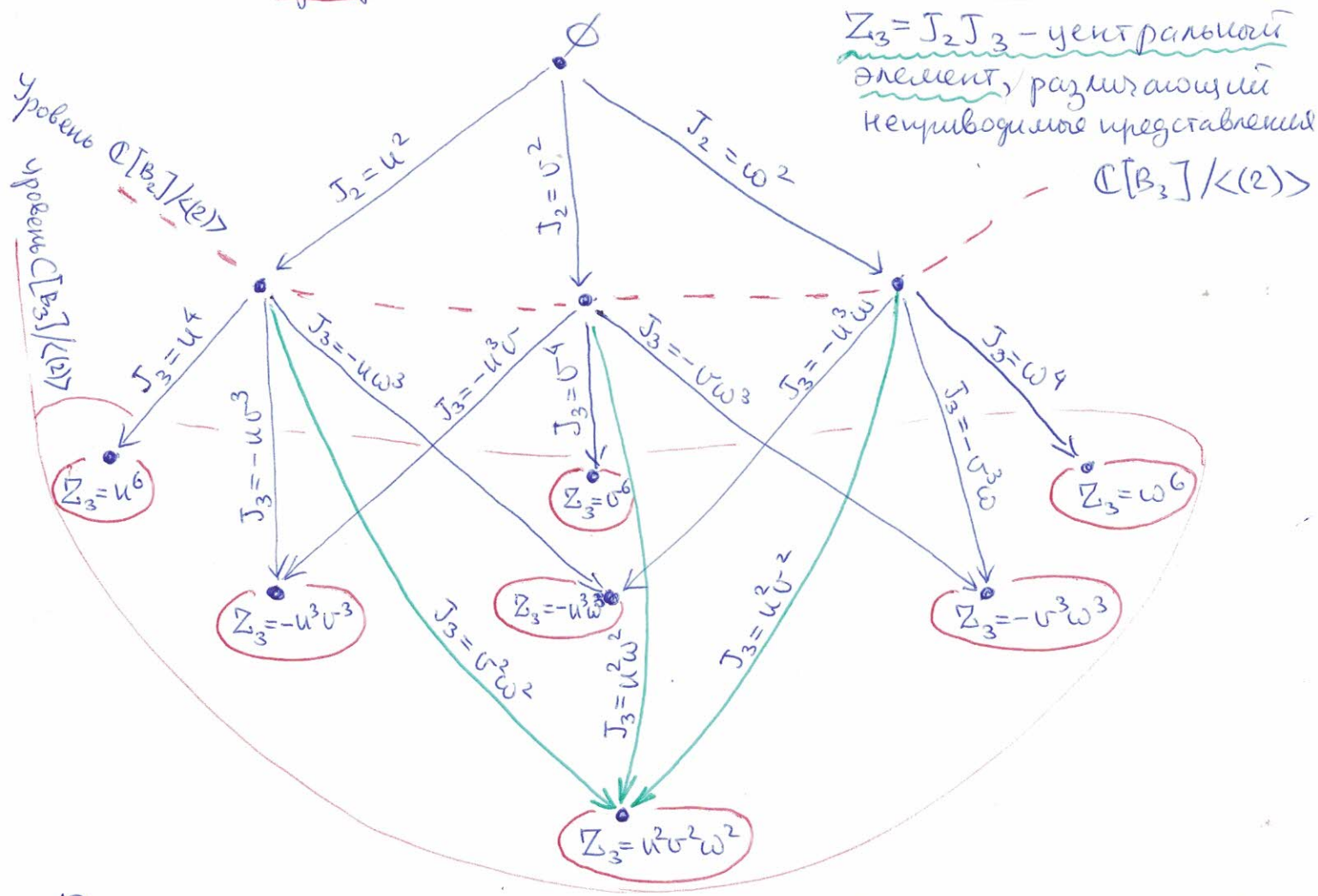
мне неизвестно: полезно прийти вычислением с разложением левой части (3b) по линейному базису в  $\mathbb{C}[B_3] / \langle (2) \rangle$ , либо проверкой (3b) в известных неприводимых представлениях алгебры.

Соотношение (3b) замечательно тем, что левая его часть имеет простое выражение для спектра  $J_3$  в вершинах  $u, \sigma, \omega$ .

Из (3b) можно восстановить граф ветвления  $\mathbb{C}[B_3] / \langle (2) \rangle$

# Граф ветвления $\mathbb{C}[B_3]/\langle(2)\rangle$ :

(21)



Вершины графа отвечают неприводимым представлениям алгебр  $\mathbb{C}[B_i]/\langle(2)\rangle$ ,  $i=2,3$ , в конечных вершинах, отвечающих  $\mathbb{C}[B_3]/\langle(2)\rangle$  указаны значения центрального элемента  $Z_3 = J_2 \cdot J_3$ . Пути из вершины  $\emptyset$  в вершину заданного неприводимого представления маркируют базисные векторы представления. Значения  $J_2$  и  $J_3$  на базисном векторе указаны на ребрах путей.

Как и должно быть:  $24 = 3^2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1^2$ . - у алгебры  $\mathbb{C}[B_3]/\langle(2)\rangle$  в её полупростом разложении есть одно 3-мерное, три 2-мерных и три 1-мерных неприводимых представления. 1-мерные и 2-мерные представ-

Легкие изоморфизмы тем, что мы уже изучили для алгебры Гейзенберга  $H_3$ . Интересно 3-мерное представление.

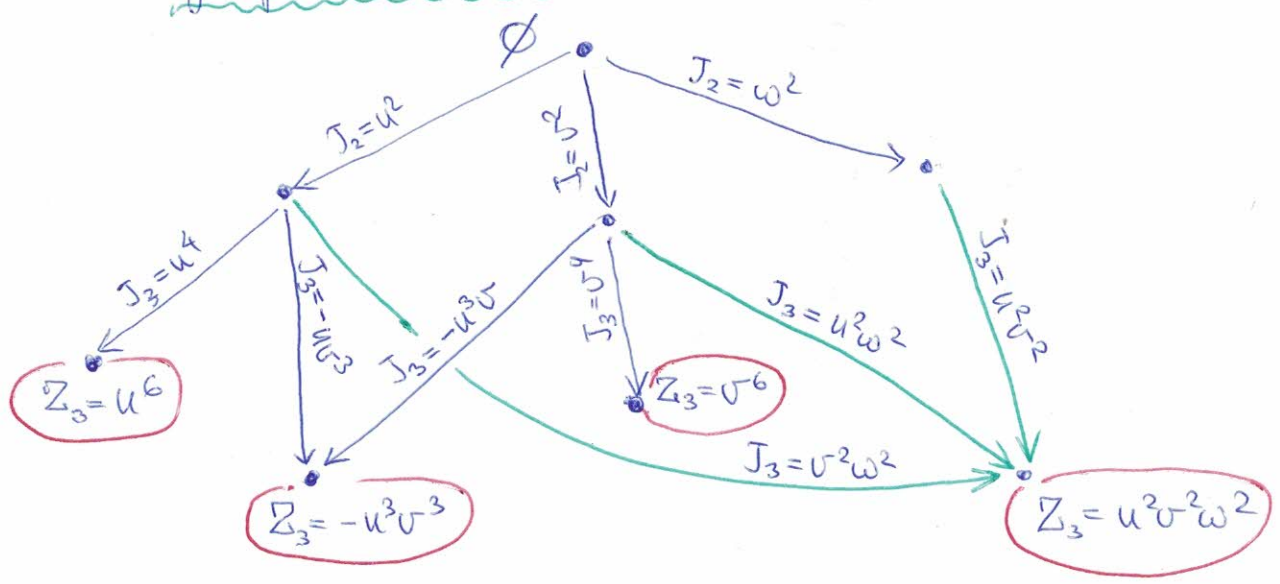
При рассмотрении фактор-алгебры  $\mathbb{C}[B_n]/\langle (2) \rangle$  оказывается, что для  $n=2,3,4,5$  они конечномерны, а начиная с  $n=6$  становится бесконечномерными.

Для получения конечномерных фактор-алгебр  $\mathbb{C}[B_n]$  при  $n \neq 6$  надо, помимо (2) наложить ещё условия на  $J_2$  и  $J_3$ , усиливающие (3в). Хороший вариант усиления:

$(J_2 - u^2 1)(J_2 - v^2 1)(J_3 - u^2 v^2 1) = 0 \quad (4)$

позволяет сохранить интересное 3-мерное представление, т.к. он сохраняет путь в графе ветвления  $\mathbb{C}[B_3]/\langle (2) \rangle$  из вершины  $J_2 = \omega^2$  в вершину  $J_3 = u^2 v^2 \omega^2$  (с  $J_3 = u^2 v^2$  на ребре), и "убивает" все другие пути из этой вершины.

Граф ветвления  $\mathbb{C}[B_3]/\langle (2), (4) \rangle$



Алгебра  $\mathbb{C}[B_3]/\langle (2), (4) \rangle$  имеет размерность

$$3^2 + 2^2 + 2 \cdot 1^2 = 15 = 5!!$$

Подграф ее графа ветвления, содержащий только 1- и 2-мерные представления (без зеленых стрелок) — граф ветвления  $H_3(q)$ .

С увеличением  $n$ :  $\dim \mathbb{C}[B_n]/\langle (2), (4) \rangle = (2n-1)!!$  — эта алгебра называется алгеброй Бирман-Мурраками

Величина:  $\boxed{BMW_n := \mathbb{C}[B_n]/\langle (2), (4) \rangle}$

Условие (4) в этой алгебре нарушает симметрию собственных значений  $u, v, w$  генератора  $b_1$  и вводит проектор с  $b_1 = w$  или  $J_2 = w^2$ . Проведем традиционное перемасштабирование и переобозначение собственных значений  $J_2$ :

$$\boxed{u \mapsto q, \quad v \mapsto -q^{-1}, \quad w \mapsto \mu}$$

и введем специальное обозначение для проектора с собственным значением  $J_2 = w^2 = \mu^2$  (т.е. соэф. значение  $b_1 = \mu$ ):

$$\boxed{K_1 = - \frac{(b_1 - q)(b_1 + q^{-1})}{\mu(q - q^{-1})}} \quad (5)$$

$K_1$  — не нормирован; в силу (2) имеем;

$$\boxed{K_1 b_1 = b_1 K_1 = \mu K_1 \quad K_1^2 = \eta K_1, \quad \eta = \frac{(q-\mu)(\frac{1}{q}+\mu)}{\mu(q-q^{-1})}} \quad (6)$$

Алгебра  $BW_n(q, \mu)$  удобно описывать в терминах (24) набора генераторов  $v_i, K_i, i=1, 2, \dots, n-1$ , удовлетворяющих, помимо артиновых соотношений на  $v_i$  в  $B_n$  еще условиям факторизации (2) (с  $u=q, v=q^{-1}, w=\mu$ ) и следующими из него соотношениями (6a), а также следующими из (4) соотношениями

$$v_i v_{i\pm 1} K_i = K_{i\pm 1} K_i$$

$$K_i v_{i\pm 1} v_i = K_i K_{i\pm 1}$$

$$K_i K_{i\pm 1} K_i = K_i$$

$$K_i v_{i\pm 1}^\epsilon K_i = \mu^{-\epsilon} K_i, \quad \epsilon = \pm 1$$

$$v'_i K_{i+1} v'_i = v'_{i+1} K_i v'_{i+1}, \quad \text{где } v'_i := v_i - (q - q^{-1}) \mathbb{1}$$

(6b)

Вывод (6b) из (4) непрост, но (6b) удобнее приспособлена для изучения алгебра

Отметим очевидное:  $BW_n(q, \mu) / \langle K_i \rangle = H_n(q)$ .

В пределе  $q \rightarrow \pm 1$  и при выборе  $\mu = \pm q^i$  алгебра  $BW_n$  переходит в известные алгебра Брауэра (R. Brauer), которые были введены для исследования неприводимых представлений ортогональной и симплектической группы  $M_n$ , также как симметрические группы  $S_n$  используются для изучения неприводимых представлений линейных групп  $M_n$   $GL(n)$  и  $SL(n)$ .

Генераторы  $K_i$  в алгебрах Брауэра и  $BW_n$  имеют отношение к инвариантному скалярному произведению в ортогональной и симплектической группах.