

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2023
ЛИСТОК 4

1. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} (z - a)^n dz$ по контуру $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t < 2\pi$, $r > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} z^n dz$, где $n \in \mathbb{Z}$, а γ – некоторый путь из a в b . (Убедитесь, что при $n \neq -1$ интеграл не зависит от выбора пути, а при $n = -1$ зависит, и опишите как.)

3. Вычислите интеграл $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + \frac{1}{4}}$ по единичной окружности.

4. Вычислите интеграл $\oint_{\gamma} \frac{2z^2 + 5z + 8}{z(z+1)^2} dz$, где контур γ – окружность $|z| = 3$.

5. Найдите все возможные значения интеграла $\int_C \frac{dz}{z(z^2 - 1)}$ при различных выборах контура C (C – замкнутый контур без самопересечений, не проходящий ни через одну из точек $0, 1, -1$).

6. Покажите, что если путь γ , соединяющий точки 0 и 1 , не проходит через точки $\pm i$, то

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

где k – целое число.

7. Вычислите интеграл $\oint_{|z|=1} \cos(z^{-1}) dz$.

8. Приведите пример рациональной функции f и замкнутого контура γ таких, что $\oint_{\gamma} f(z) dz = 1$ и $\oint_{\gamma} zf(z) dz = -1$.

9. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} \bar{z} dz$, где γ – окружность радиуса R с центром в точке $a \in \mathbb{C}$, проходимая против часовой стрелки.

10. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz$, где γ – окружность радиуса R с центром в точке a ($|a| \neq R$).

11. Пусть $P(z)$ – многочлен. Докажите, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=R} P(z) d\bar{z} = -R^2 P'(a).$$

12. Пусть γ – гладкий замкнутый контур, а функция f голоморфна в окрестности кривой γ . Докажите, что $\oint_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$ – чисто мнимое число.

13. Вычислите интегралы

(а) $\iint_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z|^2} dx dy,$

(б) $\iint_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z|^2 + az + \bar{a}\bar{z}} dx dy.$

Направление обхода контуров в контурных интегралах предполагается положительным (против часовой стрелки).