Примеры Лагранжианов II

Пример 1

Труба кругового сечения с внутренним радиусом R неподвижно закреплена так, что её ось горизонтальна. Вторая труба массы M и радиуса $r<R$ (толщиной её стенок можно пренебречь) может кататься без проскальзывания внутри неподвижной трубы. При этом движении трубы всё время касаются друг друга, а их оси параллельны. Сила тяжести: $\vec{g} \perp$ оси.

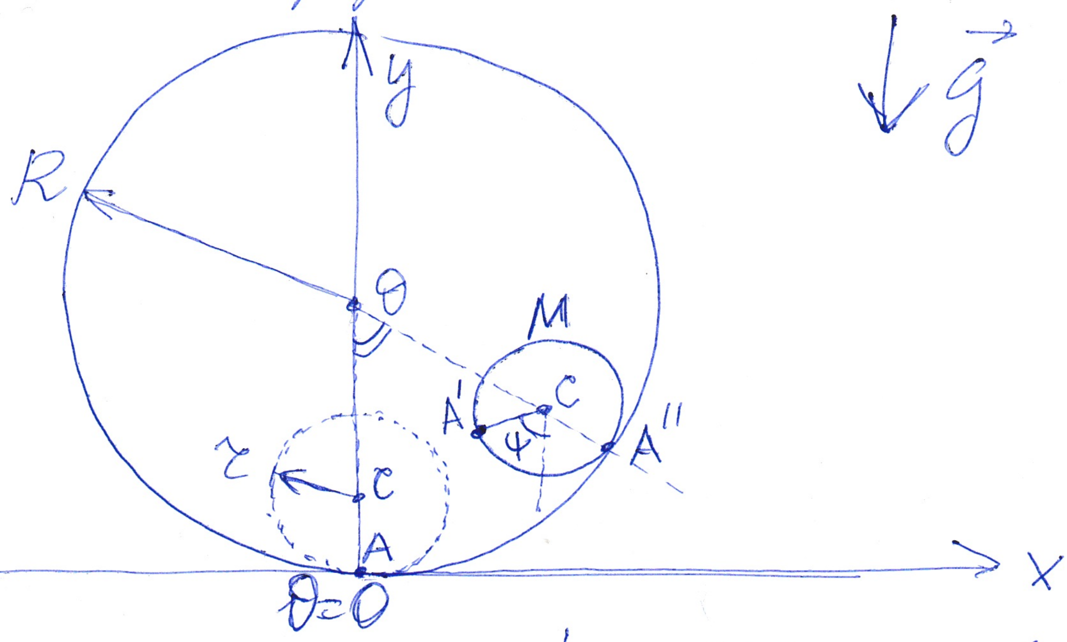
а) Определите число степеней свободы, составьте Лагранжиан системы.

б) Выпишите законы сохранения (интегралы движения) если они есть.

в) Определите частоту малых колебаний подвижной трубы вокруг положения равновесия.

Решение:

а) Система имеет одну степень свободы, поскольку проскальзывания нет. В качестве обобщённой координаты удобно выбрать угол θ, отсчитываемый от положения равновесия трубы M:



Лагранжиан $L = T_{кин} - U$.

Кинетическую энергию представим в виде суммы кинетической энергии центра масс трубы M и кинетической энергии относительного движения:

$$T_{кин} = T_c + T_{отн}.$$

Декартовы координаты центра масс:

$$x_C = (R-r)\sin\vartheta \qquad y_C = R-(R-r)\cos\vartheta$$

$$\dot{x}_C = (R-r)\dot{\vartheta}\cos\vartheta \qquad \dot{y}_C = (R-r)\dot{\vartheta}\sin\vartheta$$

$$T_C = \frac{M}{2}(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2) = \frac{M}{2}(R-r)^2\dot{\vartheta}^2$$

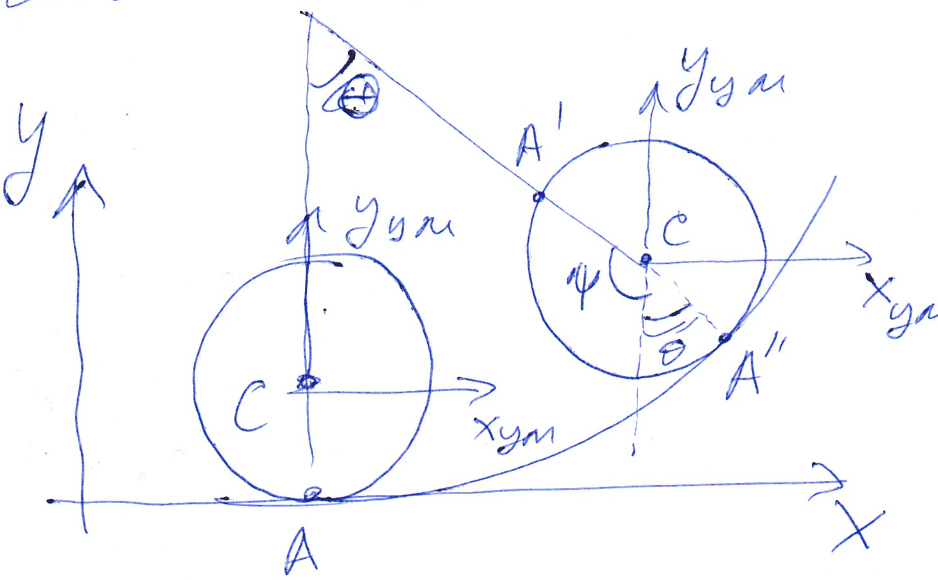
Замечание T_C можно выписать сразу, т.к. центр масс C движется по окружности радиуса $(R-r)$ с угловой скоростью $\dot{\vartheta}$.

Относительное движение представляет собой вращение трубы M вокруг центра масс и нужно только правильно найти угловую скорость этого вращения.

Здесь есть одна тонкость по сравнению с обручем, катящимся по плоской поверхности клина (эту задачу разбирали на прошлом семинаре).

Тонкость заключается в том, что формула $T_{кин} = T_C + T_{отн}$

подразумевают, что оси =4=
координат системы центра
масс всё время параллельны
осям координат неподвижной
системы:



Поэтому если центр масс C
сместился на угловую координату
ϑ, то относительно осей системы
центра масс труба M повернулась
на угол ψ. На рисунке A'
это новое положение точки A,
в которое точка A перешла
при повороте ϑ. Так как
проскальзывания нет то имеется
равенство длин дуг:

$$\breve{AA''} = \breve{A'A''}$$

или $R\theta = r(\varphi + \theta) \Rightarrow$

$\Rightarrow r\varphi = (R-r)\theta \Rightarrow r\dot{\varphi} = (R-r)\dot{\theta}$

Кинетическая энергия относительного движения: $T_{отн} = \frac{M}{2}(r\dot{\varphi})^2 = \frac{M}{2}(R-r)^2\dot{\theta}^2$.

Потенциальная энергия тела в поле тяжести определяется положением его центра масс:

$$U = Mgy_c = -Mg(R-r)\cos\theta + MgR.$$

Последнее постоянное слагаемое можно опустить (оно определяет выбор положения трубы с нулевой U), так как изменение Лагранжиана на константу не влияет на уравнения движения системы.

Итак, Лагранжиан можно записать в таком виде:

$$\boxed{L = M(R-r)^2\dot{\theta}^2 + Mg(R-r)\cos\theta.}$$

Здесь есть единственный закон сохранения: сохраняется полная механическая энергия E:

$$\mathcal{E} = T_{кин} + U = M(R-r)^2\dot{\theta}^2 - Mg(R-r)\cos\theta = 6 = \\ = const.$$

Замечание Поскольку система имеет только <u>одну</u> степень свободы, у нее не может быть больше одного (<u>функционально независимого</u>) интеграла движения.

Положение равновесия трубы M — точка $\theta = 0$. Запишем Лагранжево уравнение движения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$$

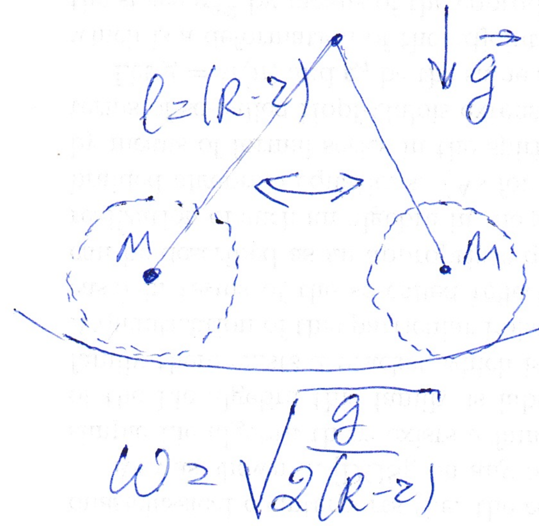
$$\Rightarrow 2M(R-r)^2\ddot{\theta} + Mg(R-r)\sin\theta = 0$$

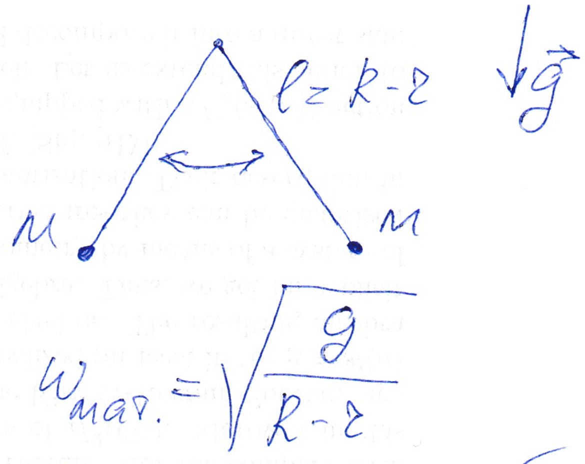
и разложим $\sin\theta$ в окрестности $\theta = 0$ до первого порядка (<u>малые</u> отклонения):

$$\underbrace{\ddot{\theta} + \frac{g}{2(R-r)}\theta} + o(\theta) = 0$$

Это уравнение гармонических колебаний с $\omega^2 = \frac{g}{2(R-r)}$.

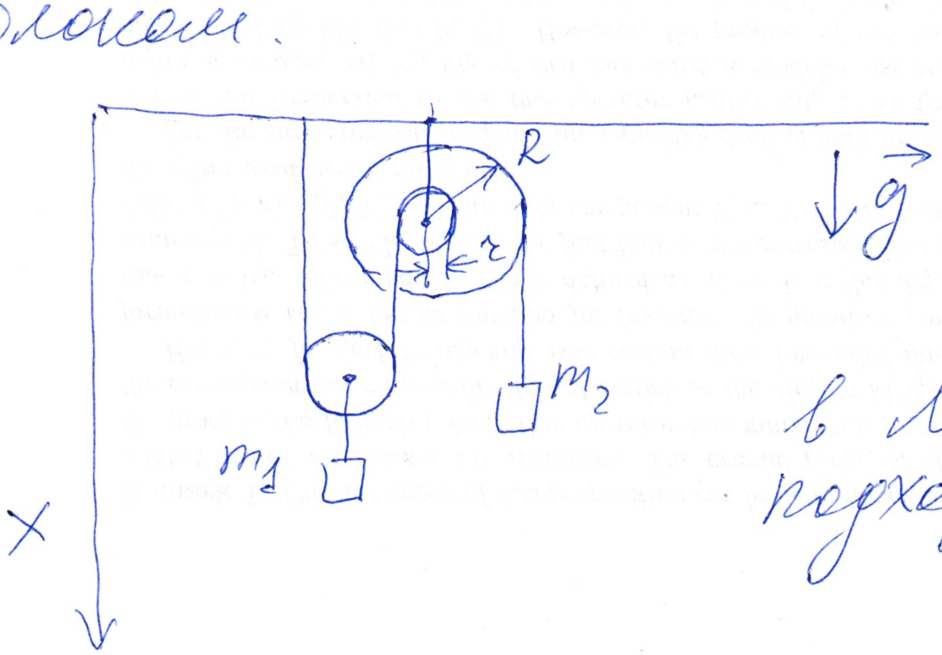
Эта частота в $\sqrt{2}$ раз меньше = 7 = частоты <u>математического</u> маятника с длиной подвеса $l = (R - r)$:





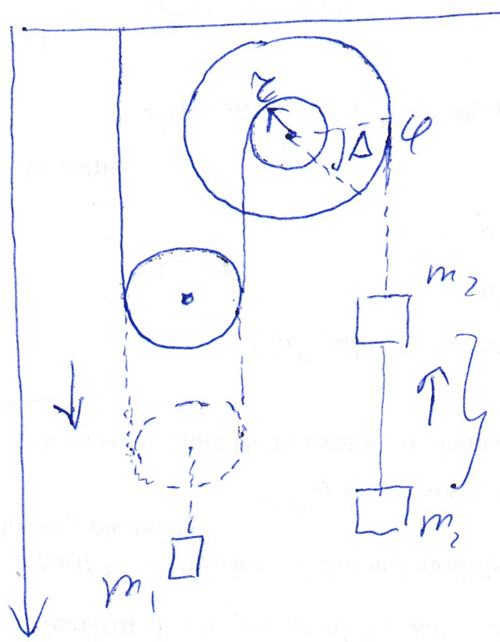
Пример 2

В ДЗ-1 была задача с двойным блоком.



Разберем её в Лагранжевом подходе.

Система имеет <u>одну</u> степень свободы, поэтому нужно найти связь декартовых координат грузов x_1 и x_2:



Пусть блок повернулся на угол $\Delta\varphi$. Для определённости считаем $\Delta\varphi > 0$ при повороте против часовой стрелки.

Тогда из-за <u>нерастяжимости</u> нитей имеем такие изменения координат x_1 и x_2:

$$\Delta x_1 = \frac{r\Delta\varphi}{2} \qquad \Delta x_2 = -R\Delta\varphi$$

В подвижном блоке удлинение верёвки $\Delta l = r\Delta\varphi$ распределяется по <u>обе</u> стороны от подвижного блока, поэтому $\Delta x_1 = \frac{\Delta l}{2}$.

Исключая $\Delta\varphi$ получаем

$$\frac{2\Delta x_1}{r} + \frac{\Delta x_2}{R} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{2R}{r}\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0}$$ — нужная нам связь.

$$\Downarrow$$

$$\frac{2R}{r}\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$$

$$T_{кин} = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} = \left(\text{выражаем } \dot{x}_2 = -\frac{2R}{r}\dot{x}_1\right) =$$

$$= \frac{\dot{x}_1^2}{2}\left(m_1 + \frac{4R^2}{r^2} m_2\right)$$

Потенциальная энергия в поле тяжести:

$$U = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 .$$

Замечание Знак минус есть следствие выбора оси Ox вдоль вектора $\vec{g}$. Всегда должно выполняться свойство: $-\frac{dU}{dx} = (\vec{F}_{тяж})_x$.

Если ось Ox вдоль $\vec{g}$, то $(\vec{F}_{тяж})_x = mg$, отсюда все знаки следуют.

Итак:

$$L = T_{кин} - U = \frac{\dot{x}_1^2}{2}\left(m_1 + \frac{4R^2}{r^2}m_2\right) + $$
$$+ g x_1\left(m_1 - \frac{2R}{r}m_2\right).$$

$\boxed{\text{Замечание}}$: в выражении для потенциальной энергии мы заменили x_2 выражением, которое следует из кинематической связи:

$$\dot{x}_2 = -\frac{2R}{r}\dot{x}_1 \Rightarrow x_2 = -\frac{2R}{r}x_1 + \underline{Const},$$

и опустили константу интегрирования.

Уравнение Эйлера – Лагранжа

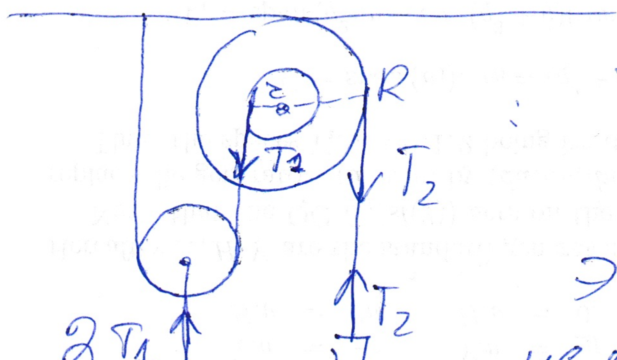
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1\left(m_1 + \frac{4R^2}{r^2}m_2\right) = g\left(m_1 - \frac{2R}{r}m_2\right)$$

$$\ddot{x}_1 = g\,\frac{\left(m_1 - 2R/r\, m_2\right)}{m_1 + \frac{4R^2}{r^2}m_2}$$

Видно, что система может находиться в равновесии (условие $\ddot{x}_1 = 0$) при

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{2R}{r}}$$

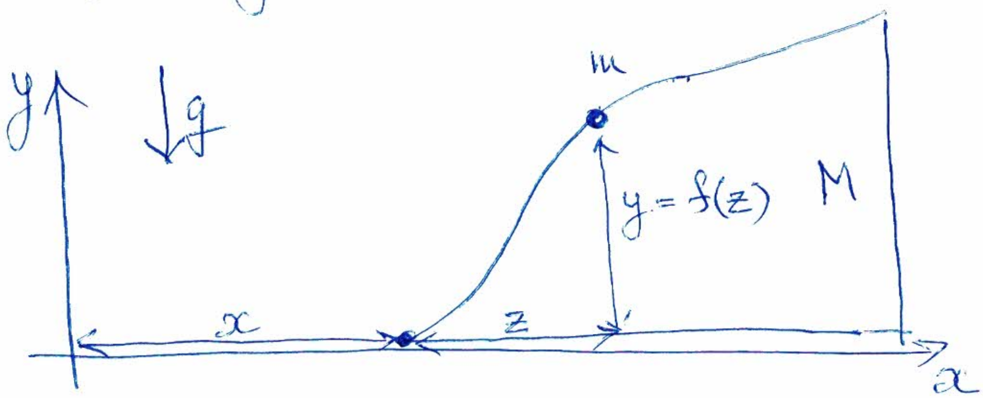
Замечание. В Лагранжевом подходе нам не нужно исключать из уравнений силы натяжения нитей и => не нужно знание о моментах сил, которое требуется в Ньютоновом подходе.



$T_1 r = T_2 R$

Это дополнительное условие для исключения сил натяжения нитей

Задача о точке (санки), скатывающейся по кривому клину. (1)



$y = f(z)$ – профиль клина

M – масса клина

$y|_{z=0} = 0$

Для точки m ее координаты: $\begin{cases} x_m = x + z \\ y_m = f(z) \end{cases}$

Скорость клина M : $\dot{x}$ (только по оси $O\vec{x}$)

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\Big\{\overbrace{(\dot{x}+\dot{z})^2}^{\dot{x}_m^2} + \overbrace{f'^2 \cdot \dot{z}^2}^{\dot{y}_m^2}\Big\} =$$

$$= \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{z} + \frac{m}{2}(1+f'^2)\dot{z}^2 =$$

$$= \frac{M+m}{2}\left(\dot{x} + \frac{m}{M+m}\dot{z}\right)^2 + \frac{m}{2}\left\{1 + f'^2 - \frac{m}{M+m}\right\}\dot{z}^2$$

абсорбировали в полный квадрат слагаемое $m\dot{x}\dot{z}$

Заменим переменную x:

$$x \mapsto \boxed{X := x + \frac{m}{M+m} z = \frac{m(x+z) + Mx}{m+M}}$$

X это, с точностью до const координата центра масс системы по оси $O\vec{x}$

$$\boxed{T = \frac{(M+m)}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\left\{\frac{M}{m+M} + f'^2\right\}\dot{z}^2}$$

кин. энергия системы

$U = mg\,y_m = mg\,f(z)$ – потенциальная энергия системы

Строим:

$$\boxed{L = T - U = \frac{(M+m)}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\left\{\frac{M}{m+M} + f'^2\right\}\dot{z}^2 - mg\,f(z)}$$

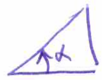
Движение по X:

$$L_X := \frac{M+m}{2}\ddot{X} = 0 \Rightarrow \dot{X} = const$$

центр масс по оси $\vec{Ox}$ движется с постоянной скоростью

По z:

$$\boxed{L_z := m\left[\left(\frac{M}{m+M} + f'^2\right)\dot{z}\right]^{\cdot} - \frac{m\dot{z}^2}{2}\cdot 2f'f'' + mgf' = 0}$$

Если клин ровный, т.е. $f'(z) = k = const$  $k = tg\,\alpha$,

то движение точки m по клину равноускоренное:

$$m\left(\frac{M}{m+M} + k^2\right)\ddot{z} + mgk = 0$$

Такая задача у нас уже была на 2-м семинаре.

Если $f'(z)$ переменная, то лучше решать не уравнение Эйлера-Лагранжа, а записать закон сохранения энергии (почему он сохраняется?)

$$\boxed{E = \frac{(M+m)}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\left\{\frac{M}{m+M} + f'^2\right\}\dot{z}^2 + mg\,f(z) = const}$$

Будем далее считать центр масс покоящимся на оси $\vec{Ox}$: $\dot{X} = 0$, т.е. будем работать в системе центра масс (только по оси $\vec{Ox}$).

Будем также считать, что в начальный момент времени $t=0$ и частица и клин покоились:

$$\boxed{\dot{x}(0)=\dot{z}(0)=0} \Rightarrow \dot{X}(0)=0$$

Тогда $\boxed{E = mgH, \text{ где } H = y_m\big|_{t=0}}$ — начальная высота частицы m

ЗСЭ принимает вид

$$\boxed{\left(\frac{M}{m+M}+f'^2\right)\dot{z}^2 = 2g(H-f)}$$

Какова скорость точки m по оси $O\vec{x}$ в момент соскальзывания с клина?

В момент соскальзывания: $y_m = f(z) = 0$

$f'(z) = k$ — $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол при основании клина

В момент соскальзывания

$$\boxed{\dot{z}^2 = \frac{2gH}{\frac{M}{m+M}+k^2}}$$

Но это не скорость точки m.

$$\begin{cases} \dot{x}_m = \dot{X} + \dot{z}, \text{ причем} \\ \dot{X} = \dot{x} + \frac{m}{M+m}\dot{z} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{x}_m = \left(1-\frac{m}{M+m}\right)\dot{z} = \frac{M}{m+M}\dot{z}$$

Окончательно имеем:

$$\boxed{\dot{x}_m = \frac{M}{m+M}\dot{z} = -\frac{M}{m+M}\sqrt{\frac{2gH}{\frac{M}{m+M}+k^2}} < 0}$$

— точка летит налево (в с.ц.м.)

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{m}{m+M}\dot{z} = \frac{m}{M+m}\sqrt{\frac{2gH}{\frac{M}{m+M}+k^2}}}$$ клин летит направо

Замечаем, что $|\dot{x}_m|$ максимальна при $k = 0$, т.е. если угол при основании клина: $\alpha = 0$

$$\boxed{|\dot{x}_m|_{max} = \sqrt{\frac{M}{m+M}2gH}}$$

Это значит, что вся потенциальная энергия точки m: mgH перешла в кин. энергию разлетающихся вдоль оси $O\vec{x}$ клина и точки. От формы поверхности клина $f(z)$ ничего не зависит.

$|\dot{x}_m|$ минимальна при $k \to \infty$, т.е. если угол при основании клина $\alpha =$ Pi/2 Тогда

$$|\dot{x}_m|_{min} = 0,$$

т.е. вся пот. энергия mgH перешла в кинетическую энергию падения точки m вдоль $O\vec{y}$

Ситуация странная: точка m сначала начинает движение вдоль оси $O\vec{x}$ налево, потом тормозится и начинает возвращаться назад. К моменту падения на пол ($y_m = 0$) она имеет $\dot{x}_m = 0$.

Это из-за того, что она жёстко прищеплена к поверхности клина. В реальной жизненной ситуации она скользит по клину до момента, когда $\ddot{x}_m \sim \ddot{z} = 0$, а потом отрывается от клина и летит с постоянной скоростью $\dot{x}_m$

Определим место, где точка отрывается от клина:

Для этого решаем уравнение $\ddot{z} = 0$ для траектории движения частицы. Технически проще всего применить $\frac{d}{dt}$ к закону сохр. энергии (*) стр. 3 и учесть $\ddot{z} = 0$:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(\dot{z}^2)}_{2\dot{z}\ddot{z}=0}\left(\frac{M}{m+M} + f'^2\right) + \dot{z}^2 \underbrace{\frac{d}{dt}(f'^2)}_{2f'f''\dot{z}} = -2g\underbrace{\frac{d}{dt}(f)}_{f'\cdot\dot{z}}$$

С учётом того, что $f'\dot{z} \neq 0$ в точке отрыва (так думаем)

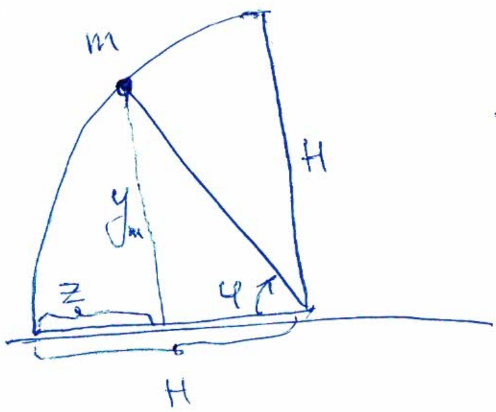
получаем $$\boxed{\dot{z}^2\Big|_{\text{в точке отрыва}} = -\,g/f''}$$

Подставляя выражение для $\dot{z}^2$ назад в З.С.Э. имеем: окончательно ур-ние точки отрыва:

$$\boxed{\frac{M}{m+M} + f'^2(z) + 2(H-f)f''(z) = 0} \qquad (**)$$

$f'' < 0$ в точке отрыва.

Решим уравнение отрыва для круглой горки: (6)



$$\begin{cases} \underline{y_m = H\sin\varphi = f(z)} \\ z = H(1-\cos\varphi) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{d\varphi} &= H\cos\varphi \\ \frac{dz}{d\varphi} &= H\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dz} = \operatorname{ctg}\varphi = f'(z)}$$

$$\underset{f''(z)}{\boxed{\frac{d^2y}{dz^2}}} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d}{dz}(\operatorname{ctg}\varphi) = -\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{dz} = \boxed{-\frac{1}{H\sin^3\varphi}}$$

Подставляем полученные формулы в ур-ние отрыва (**) стр. 5:

$$\frac{M}{m+M} + \operatorname{ctg}^2\varphi - \frac{2(1-\sin\varphi)}{\sin^3\varphi} = 0 \quad (\text{H сократилось})$$

$$\frac{M}{m+M} = -\frac{m}{m+M} + 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{2(1-\sin\varphi)}{\sin^3\varphi} = \frac{m}{M+m}$$

$$\boxed{3\sin\varphi - 2 = \frac{m}{M+m}\sin^3\varphi}$$

Фактически это кубическое ур-ние на высоту точки отрыва $y_m = H\sin\varphi$.

В случае $M \to \infty$ (клин не движется) уравнение становится линейным и имеет решение $\sin\varphi = 2/3$

В противоположном пределе $M \to 0$ $\boxed{\sin\varphi = 1}$ – корень уравнения т.е. точка m сразу отрывается от клина. Промежуточные случаи

$$\boxed{\frac{2}{3} \leq \sin\varphi \leq 1}$$