

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2023  
ЛИСТОК 5

1. Найдите конформное отображение полукруга  $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$  на верхнюю полуплоскость.

2. Найдите конформное отображение полуполосы  $\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < 1$  на верхнюю полуплоскость.

3. Найдите конформное отображение верхней полуплоскости с выброшенным отрезком от 0 до  $i$  на верхнюю полуплоскость.

4. Найдите конформное отображение внешности эллипса с полуосями  $a, b$  ( $a > b$ ) на внешность единичного круга.

5. Найдите конформное отображение области  $D$ , являющейся верхней полуплоскостью  $\operatorname{Im} z > 0$  с разрезом по дуге окружности  $|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \alpha$ , где  $0 < \alpha < \pi$ , на верхнюю полуплоскость.

6. Найдите конформное отображение области  $D$ , являющейся полуполосой  $\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi$  с разрезом по отрезку  $[\frac{1}{2}\pi i, 1 + \frac{1}{2}\pi i]$ , на верхнюю полуплоскость.

7. Пусть  $\Gamma$  – гладкая кривая  $\Gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}$  в верхней полуплоскости  $\mathbb{H}$ , начинающаяся в точке  $\Gamma(0) \in \mathbb{R}$  вещественной оси, и пусть  $\Gamma_t$  – часть кривой  $\Gamma_t := \Gamma([0, t])$ . Через  $g(z, t)$  обозначим функцию, осуществляющую конформное отображение области  $\mathbb{H} \setminus \Gamma_t$  на  $\mathbb{H}$ , нормированную условием  $g(z, t) = z + u(t)z^{-1} + O(z^{-2}), z \rightarrow \infty, t > 0$ . Докажите, что существует непрерывная вещественнозначная функция  $\xi(t)$ , такая, что функция  $g(z, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial g(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{g(z, t) - \xi(t)} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad g(z, 0) = z.$$

Это уравнение называется (хордовым) уравнением Левнера и играет важную роль в теории конформных отображений.