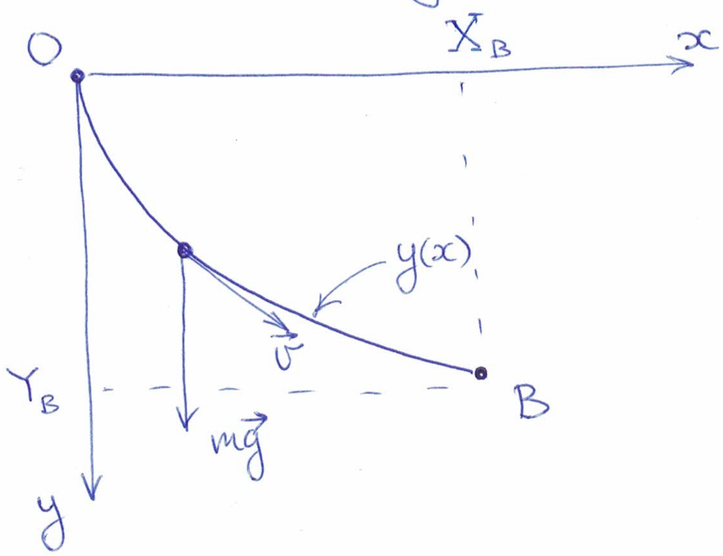
Семинар 6

Примеры вариационных задач

Исторически первый пример вариационной задачи – задача о брахистохроне. Она была поставлена Иоганном Бернулли в 1696 г. Это было научное соревнование того времени: кто первый решит. Через год было найдено 5 решений, одно из них принадлежит Ньютону (1697 г.). Его мы и разберём.



Задача: найти форму кривой $y(x)$, по которой материальная точка (санки) наиболее быстро соскользнёт из точки O в точку B (см. Рис.).

$$O=(0,0) \quad B=(X_B, Y_B)$$

На точку действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная по оси $\vec{Oy}$. В начальный момент времени материальная точка стоит.

Используем известный нам закон сохранения энергии точки:

$$E = \frac{mv^2}{2} - mgy,$$

знак "–", т.к. ось $\vec{Oy}$ смотрит вниз.

где $\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ – скорость точки.

Её величина: $v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x}\sqrt{1+y'^2}$,

где $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$.

Так как в начальный момент времени $t=0$

$v(0) = 0$, $x(0) = y(0) = 0$, то $E = 0$

и закон сохранения энергии даёт соотношение

$$v = \sqrt{2gy}$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{x}\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{2gy}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx = dt.$$

Интегрируем:

$$T_B[y(x)] = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx \qquad (0)$$

Время прибытия в точку B является функционалом от траектории $y(x)$.

Задача о минимизации T_B выглядит как механическая задача с лагранжианом

$$\boxed{L(y, y', x) = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}},$$

где x играет роль времени, а $y(x)$ – единственная обобщенная координата задачи.

Так как $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, то в системе сохраняется "энергия" (см. Лекцию 5, св-во лагр. формализма C2, стр 14)

$$\text{"}E\text{"} = y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = -\frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = \text{const}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y(1+y'^2) = k = \text{const}} \qquad (1)$$

Этот дифур 1-го порядка и будем решать (вместо уравнения Эйлера-Лагранжа) для нахождения экстремали $T_B[y(x)]$

Разрешаем его относительно y':

$$y' = \frac{\sqrt{k-y}}{\sqrt{y}}$$

тут надо бы поставить "±", но мы рассмотрим случай "+", когда в начале движения $y' > 0$. Ответ будет годиться и для $y' \leq 0$

$$\Downarrow$$

$$dx = \frac{dy \cdot y^{1/2}}{\sqrt{k-y}}$$

Интегрируем, сделав в правой части подстановку $y(x) \mapsto \theta(x)$:

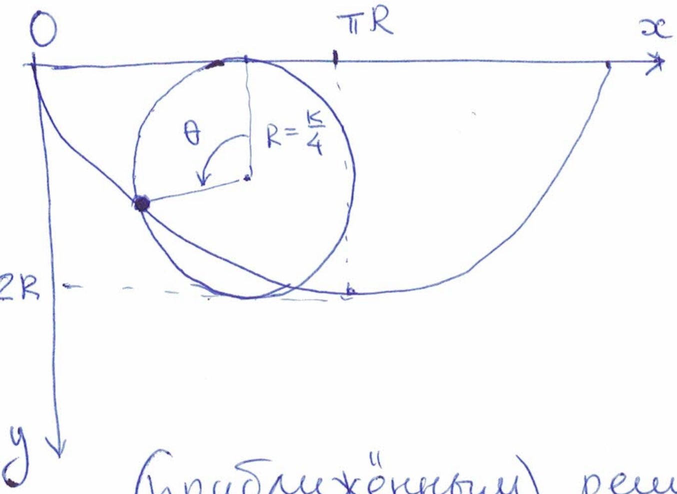
$$\boxed{y = k\sin^2(\theta/2) = \frac{k}{2}(1-\cos\theta)} \qquad (2a)$$

$$dx = k\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = \frac{k}{2}(1-\cos\theta)d\theta = \frac{k}{2}d(\theta - \sin\theta)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = x_0 + \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta)} \qquad (2b)$$

Формулы (2a,b) — это параметрическое задание циклоиды — кривой, по которой движется точка обода колеса, при его качении без проскальзывания по $\vec{Ox}$. Начальные условия $x(0) = y(0) = 0$ выполнены, если $\theta(0) = 0$, $x_0 = 0$



Константа K связана с радиусом колеса: $R = \frac{K}{4}$.

Её значение, а также значение параметра θ в точке прибытия $\theta_B = \theta(T_B)$ находятся (приближённым) решением уравнений

$$\begin{cases} Y_B = \frac{K}{2}(1-\cos\theta_B) \\ X_B = \frac{K}{2}(\theta_B - \sin\theta_B) \end{cases}$$

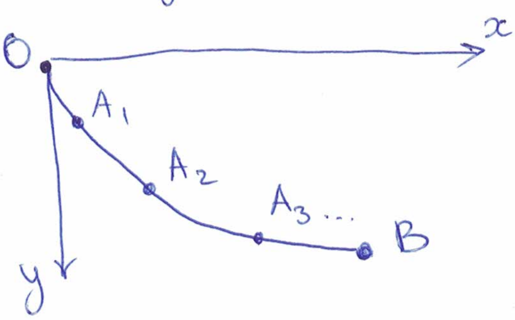
Rem 1. Если $X_B/Y_B > \pi/2$, то y' меняет знак: точке выгодно опуститься ниже Y_B, а затем поехать в горку.

Rem 2. Подставив решение (2а, в) в функционал $T_B[y(x)]$ (0), мы можем вычислить время движения по брахистохроне из O в B:

$$T_B = \int_0^{X_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx = \int_0^{\theta_B} \sqrt{\frac{K}{2g}}\,d\theta = \sqrt{\frac{K}{2g}}\,\theta_B.$$

То есть параметр θ пропорционален времени движения по брахистохроне.

Rem 3 Можно проверить, что стартуя из любой промежуточной точки циклоиды $A_1, A_2, A_3, \dots$ (см. Рис.), если начинать движение с нулевой скоростью, то до B всегда доберешься за одно и то же время.



Обширное семейство вариационных задач — это задачи о нахождении геодезических линий — кратчайших кривых, соединяющих две точки поверхности. С точки зрения механики — это задачи о движении свободной частицы по поверхности. Давайте это докажем.

Рассмотрим движение свободной частицы в n-мерном подмногообразии, вложенном в $\mathbb{R}^N$ $(N > n)$. Вложение задаётся идеальными связями

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad i = 1, \dots, N \qquad (1)$$

где x_i — декартовы координаты в $\mathbb{R}^N$, а $\{q_\alpha\}_{\alpha=1\dots n}$ — набор координат на вложенном подмногообразии.

При редукции на поверхность связей (т.е., при подстановке (1)), кинетическая энергия свободной частицы приобретает вид (считаем массу частицы $= 1$)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}(q)\, \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \qquad (2)$$

где $g_{\alpha\beta}(q) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}$ — индуцированная метрика на вложенном в $\mathbb{R}^N$ подмногообразии. Это — симметрический тензор

2 ранга, положительно определенный.

Уравнения Эйлера-Лагранжа для частицы с лагранжианом $L \equiv T$ (2) приводятся к виду (проверьте):

$$\boxed{L_\alpha := \sum_\beta g_{\alpha\beta}\,\ddot{q}_\beta + \sum_{\beta,\gamma}\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}\,\dot{q}_\beta\,\dot{q}_\gamma = 0,} \qquad (3)$$

где

$$\boxed{\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q_\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha}\right)}$$

Уравнение (3) принято называть уравнением геодезических, а участвующий в нем объект $\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}(q)$ – символом Кристоффеля.

Мы пока вывели (3), как экстремаль действия свободной частицы $S = \int_{t_a}^{t_b} T\,dt$. Чтобы оправдать название уравнений (3), покажем, что их решения являются и экстремалями функционала длины кривой на подмногообразии с метрикой $g_{\alpha\beta}(q)$. Последний функционал выглядит так:

$$\boxed{\ell[q_\alpha(t)] = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta}(q)\,d q_\alpha\, d q_\beta} = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{g_{\alpha\beta}\,\dot{q}_\alpha\,\dot{q}_\beta}\,dt}$$

подразумевается суммирование по повторяющимся индексам α и β

Здесь a и b – начальная и конечная точки кривых $\{q_\alpha(t)\}_{\alpha=1..n}$. Они фиксированы. t_a и t_b – времена отправления из начальной и прибытия в конечную точку.

Замечаем: $\ell[q_\alpha(t)] = \int\limits_{t_a}^{t_b} \sqrt{2T}\,dt$. Он, конечно, отличается от функционала действия свободной частицы

$$S[q_\alpha(t)] = \int\limits_{t_a}^{t_b} T\,dt$$

Покажем, что экстремали действия S являются экстремалями и для $\forall$ функционала

$$S_f[q_\alpha(t)] = \int\limits_{t_a}^{t_b} f(T)\,dt\ ,\ \text{где}$$

f – $\forall$ достаточно гладкая функция.

Уравнения Эйлера-Лагранжа для S_f имеют вид:

$$L_{f,\alpha} := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(T)}{\partial \dot q_\alpha}\right) - \frac{\partial f(T)}{\partial q_\alpha} = f'(T)\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right) +$$

$$+ \frac{d f'(T)}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha} = f'(T)\cdot L_\alpha + \frac{dT}{dt} f''(T)\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}.$$

Здесь L_α – это уравнение Эйлера-Лагранжа для свободной частицы (3).

Мы получили

$$L_{f,\alpha}\Big|_{L_\alpha=0} = \frac{dT}{dt} f''(T)\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}$$

Заметим теперь, что для свободной частицы её энергия $E=T$ сохраняется на траекториях движения $\left.\frac{dT}{dt}\right|_{L_\beta=0\ \forall\beta} = 0$, а значит

$$\left.L_{f,\alpha}\right|_{L_\beta=0\ \forall\beta} = 0$$, то есть экстремали действия S свободной частицы являются экстремалями и для S_f. В частности, это верно и для функционала длины кривой, для которого $f(T)=\sqrt{2T}$.

Rem: Обратное утверждение неверно: не всякая экстремаль функционала $l[q_\alpha(t)]$ является траекторией движения свободной частицы. Дело здесь не в том, что существуют геодезические, по которым не может двигаться свободная частица, их нет. Дело в том, что уравнения экстремалей функционала $l[q_\alpha(t)]$ формально имеют бесконечно много решений, отвечающих разным параметризациям одной и той же кривой (это — так называемая, репараметризационная инвариантность задачи). Траектория же движения свободной частицы допускает единственную параметризацию параметром времени t.

Пример: Задача о геодезических в пространстве Лобачевского, реализованном в верхней полуплоскости (модель Пуанкаре)

Это задача о движении свободной частицы в верхней полуплоскости $\mathbb{R}^2$, $y>0$, с метрикой

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{y^2}\,\mathrm{diag}\,(1,1).$$

Лагранжиан такой свободной частицы:

$$\boxed{L = T = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}} \quad (\text{считаем } m=2).$$

Как мы уже не раз поступали, не будем вычислять уравнения Эйлера-Лагранжа этой задачи, а воспользуемся законами сохранения (это — первые интегралы от уравнений Э.-Л.).

1) Поскольку $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, сохраняется импульс частицы вдоль оси $\vec{Ox}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{2\dot{x}}{y^2} = \mathrm{const} = 2C$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{x} = Cy^2} \qquad (4)$$

2) поскольку $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, сохраняется энергия системы.

В нашем случае: $\boxed{E = T = L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} = \mathrm{const}}$.

Подставив сюда (4), получаем уравнение на $y(t)$:

$$\boxed{\dot{y}^2 + C^2 y^4 = E y^2 \quad (E \geqslant 0)} \qquad (5)$$

* Если $C = 0$, то $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = \pm\sqrt{E}\,y$ — это вертикальный луч

$$x = \mathrm{const}, \quad y(t) = A e^{\pm\sqrt{E}t} \geqslant 0.$$

* Если $C \neq 0$, то подставив в (5) $\dot{y} = y'\dot{x} = Cy'y^2$

получаем $\boxed{y^2(1 + y'^2) = E/C^2 = R^2}$ (6)

При переходе от (4), (5) к (6) мы заменили полное описание траектории частицы на описание лишь ее формы: $y(x)$.

Решаем (6): $y^2 y'^2 = R^2 - y^2$

Напрашивается замена $\left| \begin{array}{l} z = R^2 - y^2 \\ z' = -2yy' \end{array} \right.$

$$\Downarrow$$

$$(z')^2 = 4z \Rightarrow \frac{dz}{2\sqrt{z}} = dx$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{z} = (x - A)$$

Возвращаясь к $y(x)$ имеем:

$$\boxed{(x-A)^2 + y^2 = R^2}$$

Геодезические в этой модели — это дуги окружностей (возможно, бесконечного радиуса) с центром на оси $\vec{Ox}$.