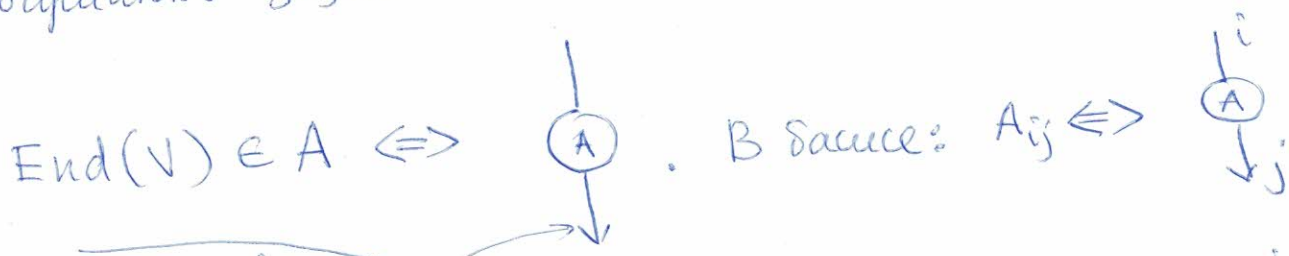


R-матрицы.

При работе с R-матричными представлениями приходится иметь дело с многоиндексными объектами. Для облегчения работы будем применять графические обозначения. Они же как придется и при построении инвариантов зацеплений. Соотставим:



это линии пространства V

Произведение операторов:

$A \cdot B \Leftrightarrow \begin{array}{c} \textcircled{A} \\ | \\ \textcircled{B} \\ \downarrow \end{array}$

В базисе: $\sum_k A_{ik} B_{kj} \Leftrightarrow \begin{array}{c} i \\ | \\ \textcircled{A} \\ | \\ \textcircled{B} \\ \downarrow j \end{array}$

Производная \sum_k по стрелке, у которой нет открытого конца

Тождественный оператор:

$\text{Id}_V \Leftrightarrow \begin{array}{c} | \\ \downarrow \end{array}$

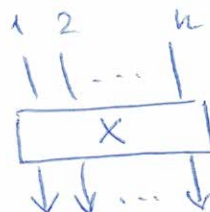
В базисе: $\delta_{ij} \Leftrightarrow \begin{array}{c} i \\ | \\ \downarrow j \end{array}$

След оператора:

$\text{Tr} A \Leftrightarrow \begin{array}{c} \textcircled{A} \\ | \\ \downarrow \\ | \\ \textcircled{A} \\ | \\ \downarrow \end{array} \Leftrightarrow \sum_i A_{ii} \text{ (в базисе)}$

Операторы на $V^{\otimes n}$

$\text{End}(V^{\otimes n}) \ni X \Leftrightarrow$



Особо нас интересуют R -матрица: $R \in \text{Aut}(V^{\otimes 2})$ (2)

Для них специальные обозначения:

$$R \Leftrightarrow \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array}, \quad R^{-1} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \quad (1)$$

Так что тогда

$$R \cdot R^{-1} = R^{-1} \cdot R = \text{Id}_V \otimes \text{Id}_V \quad (2a)$$

в картинках приобретает вид:

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \quad (2b)$$

В теории узлов (зацеплений) такое равенство картинок называется 2-м движением Рейдемейстера.

Соотношение кос (уравнения Янга-Бакстера)

$$R_{12} R_{23} R_{12} = R_{23} R_{12} R_{23} \quad (3a)$$

имеет графическое воплощение:

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \downarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \diagup \quad \diagdown \quad \downarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \diagdown \quad \diagup \quad \downarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \downarrow \quad \diagdown \quad \diagup \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \diagdown \quad \diagup \quad \downarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \diagup \quad \diagdown \quad \downarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \end{array} \quad (3b)$$

В теории узлов имеем 3-е движение Рейдемейстера.

Отметим, что здесь и далее мы используем обозначение X_{ij} ($i \neq j$) для оператора, действующего как $X \in \text{End}(V^{\otimes 2})$ в i -й и j -й компонентах.

Тах тензорного произведения пространств V : (3)

$V^{\otimes n} = V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$, и тождественно на всех остальных компонентах. Здесь мы ввели индекс $i=1, \dots, n$ при обозначении компонент V пространства $V^{\otimes n}$ для удобства их идентификации.

Для приложения в теории узлов (и не только) нам надо построить алгебраические аналоги и для

1-го движения Рейдемейстера:

$$\text{Diagram (4a): } R = \text{Id}_V = R^{-1} \quad (4a)$$

$$\text{Diagram (4b): } R^{-1} = \text{Id}_V = R \quad (4b)$$

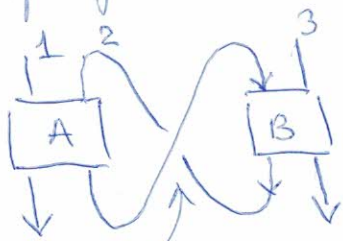
Замыкания линий, отмеченные на рисунках зелёным цветом подобны операции взятия следа. Действительно, в случае, когда $R = R^{-1} = P$ - оператор перестановки формулы (4a, б) выполняются, если считать $\text{Tr}(1) = \text{Tr}(2)$.

Здесь $\text{Tr}(i)$ - операция взятия следа в i -ой компоненте тензорного произведения $V^{\otimes n}$.

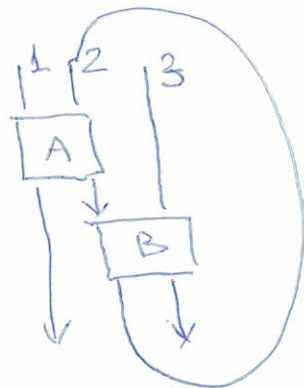
Однако, для R -матриц более общего вида такая интерпретация негодна. Наша задача:

построить аналог следа, для которого будут верны алгебраические аналогии картинок $(4a, \delta)$, для широкого семейства R -матриц. Для этого нам потребуется ввести понятие косого умножения матриц $A, B \in \text{End}(V^{\otimes 2})$.

Графически косое умножение выглядит так:



или так:



это пересечение линий не интерпретируется как R -матрица

а алгебраически так:

$$(A \triangle B) := \text{Tr}_{(2)} A_{12} B_{23} \quad (5)$$

Лемма Косое умножение (5)

а) ассоциативно

б) единица косого умножения — P_{12}

Док-ва: а) очевидно, например, из первой картинки.

Для доказательства б) нужно использовать свойства перестановки. Перечислим их все:

$$\text{Tr}_{(1)} P_{12} = \text{Id}_2, \quad \text{Tr}_{(2)} P_{12} = \text{Id}_1, \quad P_{12} A_{23} = A_{13} P_{12} \quad (6)$$

$$P_{12} = P_{21}, \quad P_{12}^2 = \text{Id}_{V^{\otimes 2}}, \quad P_{23} A_{12} = A_{13} P_{23}$$

Проверка (6) - выражение.

Докажем δ):

$$\text{Tr}_{(2)} A_{12} P_{23} = \underbrace{\text{Tr}_{(2)} P_{23}}_{A_{13}} A_{13} = \text{Id}_3 A_{13} = A_{13}.$$

Значит P - правая единица для косоумножения. \square
Так же проверяется, что P и левая единица

Def Оператор $A \in \text{End}(V^{\otimes 2})$ называется косо-
обратимым, если он обратим относительно косо-
умножения, т.е., если $\exists \psi^A \in \text{End}(V^{\otimes 2})$:

$$\boxed{\text{Tr}_{(2)} A_{12} \psi^A_{23} = P_{13} = \text{Tr}_{(2)} \psi^A_{12} A_{23}} \quad (7)$$

Здесь 2-е равенство выполнено автоматически, если
выполнено левое.

Обозначим C^A и D^A следующие, связанные
с косообратимым A_{12} элементы $\text{End}(V)$:

$$\boxed{\begin{aligned} C_2^A &:= \text{Tr}_{(1)} \psi^A_{12} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{график} \\ \text{1} \downarrow \uparrow \text{2} \\ \boxed{\psi^A} \\ \downarrow \uparrow \end{array} \\ D_1^A &:= \text{Tr}_{(2)} \psi^A_{12} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{график} \\ \text{1} \downarrow \uparrow \text{2} \\ \boxed{\psi^A} \\ \downarrow \uparrow \end{array} \end{aligned}} \quad (8)$$

Ключевое свойство этих элементов

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Tr}_{(1)} C_1^A A_{12} &= \text{Id}_2 \\ \text{Tr}_{(2)} D_2^A A_{12} &= \text{Id}_1 \end{aligned}} \quad (9)$$

Оно следует из определений (7,8) и свойств перестановки (6). Свойство (9) однозначно определяет

элементы C^A и D^A для ∇ косообратимого A (6)
(проверьте).

Формулы (9) – алгебраические аналоги картшюк (4a, б), если идентифицировать

$$\text{Tr}_{(1)} C_1^A \Leftrightarrow \text{C}^{\uparrow 1}, \quad \text{Tr}_{(2)} D_2^A \Leftrightarrow \text{D}^{\downarrow 2}$$

Одна проблема: эта процедура задается индивидуально для каждого A . В частности, она может быть размыка для R -матриц R и R^{-1} . С этим мы будем разбираться далее, а пока зафиксируем более корректные графические обозначения:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A^{\text{left}} &::= \text{Tr}_{(1)} C_1^A \Leftrightarrow \text{C}^{\uparrow 1} \\ \text{Tr}_A^{\text{right}} &::= \text{Tr}_{(2)} D_2^A \Leftrightarrow \text{D}^{\downarrow 2} \end{aligned} \quad (10)$$

Исследуем свойства косообратных матриц при обращении R -матриц:

Утверждение 1 Если R – косообратимая R -матрица,

то

$$C_1^R \Psi_{12}^R = R_{21}^{-1} C_2^R, \quad \Psi_{12}^R C_1^R = C_2^R R_{21}^{-1} \quad (11a)$$

$$D_2^R \Psi_{12}^R = R_{21}^{-1} D_1^R, \quad \Psi_{12}^R D_2^R = D_1^R R_{21}^{-1} \quad (11b)$$

Док-во. Используем при доказательстве соотношение кос в виде:

(7)

$$\boxed{R_{12}^{\varepsilon} R_{23} R_{12}^{-\varepsilon} = R_{23}^{-\varepsilon} R_{12} R_{23}^{\varepsilon}, \text{ где } \varepsilon = \pm 1} \quad (12)$$

① Докажем (12) слева на Ψ_{01}^R и Ψ_{34}^R и воспользуемся $\text{Tr}_{(1,3)}$

Преобразуем левую часть равенства:

$$\text{Tr}_{(1,3)} \Psi_{01}^R R_{12}^{\varepsilon} \Psi_{34}^R R_{23} R_{12}^{-\varepsilon} = \text{Tr}_{(1)} \Psi_{01}^R R_{12}^{\varepsilon} P_{24} R_{12}^{-\varepsilon}$$

Преобразуем правую часть:

$$\text{Tr}_{(1,3)} \Psi_{34}^R R_{23}^{-\varepsilon} \Psi_{01}^R R_{12} R_{23}^{\varepsilon} = \text{Tr}_{(3)} \Psi_{34}^R R_{23}^{-\varepsilon} P_{02} R_{23}^{\varepsilon}$$

Итак, получим

$$\boxed{\text{Tr}_{(1)} \Psi_{01}^R R_{12}^{\varepsilon} P_{24} R_{12}^{-\varepsilon} = \text{Tr}_{(3)} \Psi_{34}^R R_{23}^{-\varepsilon} P_{02} R_{23}^{\varepsilon}} \quad (13)$$

② Воспользуемся отдельно $\text{Tr}_{(1)}$ и $\text{Tr}_{(3)}$ от этого равенства. С учетом свойств перестановки и определения (8) получим:

$$\text{Tr}_{(1)} C_1^R R_{12}^{\varepsilon} P_{24} R_{12}^{-\varepsilon} = \text{Id}_2 C_4^R \quad (14a)$$

$$\text{Tr}_{(3)} D_3^R R_{23}^{-\varepsilon} P_{02} R_{23}^{\varepsilon} = \text{Id}_2 D_0^R \quad (14b)$$

Далее, из (14a)/(14b) можно получить формулы (11a)/(11b), соответственно. Преобразование

аналогично. Мы преобразуем (14a)

8

③ Докажем (14a) на P_{24} справа и используем св-ва перестановки

$$\boxed{\text{Tr}_{(1)} C_1^R R_{12}^\varepsilon R_{14}^{-\varepsilon} = C_4^R P_{24}} \quad (15)$$

Далее, выбор: $\varepsilon = \pm 1$ приводит к двум соотношениям в (14a). Мы рассмотрим выбор $\varepsilon = 1$:

④ Докажем (15) с $\varepsilon = 1$ на Ψ_{23}^R справа и вычислим $\text{Tr}_{(2)}$:

Преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{(1;2)} C_1^R R_{12} \Psi_{23}^R R_{14}^{-1} &= \text{Tr}_{(1)} C_1^R P_{13} R_{14}^{-1} = \\ &= \text{Tr}_{(1)} P_{13} R_{14}^{-1} C_1^R = \text{Tr}_{(1)} R_{34}^{-1} C_3^R P_{13} = R_{34}^{-1} C_3^R \end{aligned}$$

Здесь, переходя ко 2-й строке вычисления мы перенесли C_1^R направо, воспользовавшись циклическим свойством следа $\text{Tr}_{(1)}$, а затем перенесли перестановку P_{13} направо, применив ее свойства (6), и вычислили след.

Преобразуем - вую часть равенства:

$$\text{Tr}_{(2)} C_4^R P_{24} \Psi_{23}^R = \text{Tr}_{(2)} C_4^R \Psi_{43}^R P_{24} = C_4^R \Psi_{43}^R$$

Окончательно получаем

$$\boxed{R_{34}^{-1} C_3^R = C_4^R \Psi_{43}^R}$$

что эквивалентно левому равенству (11a) 

Следствие 1

В условиях Утверждения 1

(9)


$$C^R D^R = D^R C^R$$

(16)

Док-во: Возьмем $Tr_{(2)}$ от обеих равенств в (11a):

$$Tr_{(2)} C_1^R \Psi_{12}^R = C_1^R D_1^R = Tr_{(2)} R_{21}^{-1} C_2^R \quad (\text{левое 11a})$$

$$Tr_{(2)} \Psi_{12}^R C_1^R = D_1^R C_1^R = Tr_{(2)} C_2^R R_{21}^{-1} \quad (\text{правое 11a})$$

В силу циклического свойства следа правые части равенств совпадают, откуда следует (16) 

Следствие 2 В условиях Утверждения 1

$$C_1^R C_2^R R_{12} = R_{12} C_1^R C_2^R$$


(17a)

$$D_1^R D_2^R R_{12} = R_{12} D_1^R D_2^R$$

(17b)

Док-во: Преобразуем выражение $D_1^R D_2^R R_{12}^{-1}$:

$$\underbrace{D_1^R D_2^R R_{12}^{-1}}_{\text{правое (11b)}} \stackrel{=}{=} \underbrace{D_1^R \Psi_{21}^R D_1^R}_{\text{левое (11b)}} \stackrel{=}{=} R_{12}^{-1} D_2^R D_1^R = R_{12}^{-1} D_1^R D_2^R$$

Может таким образом доказать соотношение (17b) 

(17a) проверяется аналогично

Следствие 3 Для любого \mathbb{C} -линейного пространства W элемент $M \in \text{End}_W(V)$ — это матрица

размера $\dim V \times \dim V$, компоненты которой являются элементами W . В условиях Утверждения 1

верны следующие равенства:

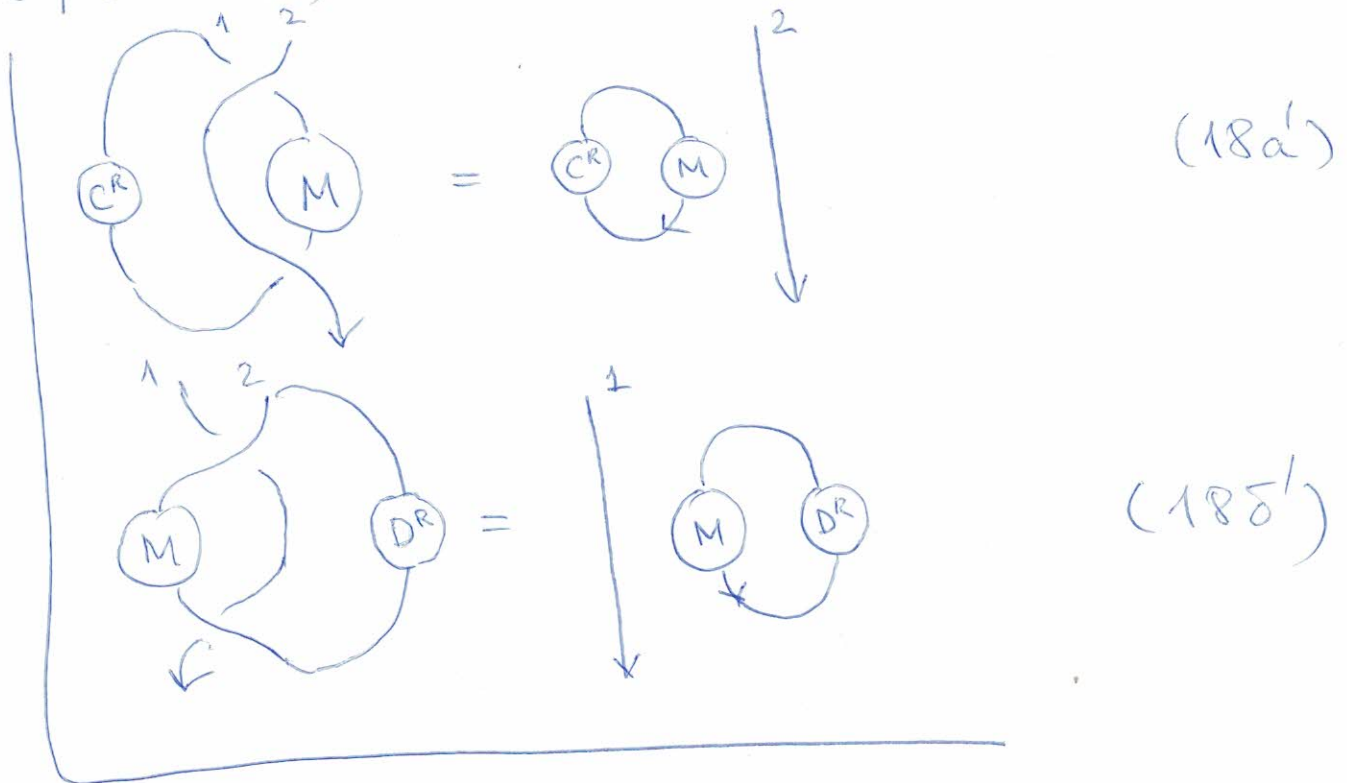
$$\text{Tr}_{(1)} C_1^R R_{12}^\varepsilon M_2 R_{12}^{-\varepsilon} = \text{Id}_2 \text{Tr}(C^R M) \quad (18a) \quad (10)$$

$$\text{Tr}_{(2)} D_2^R R_{12}^\varepsilon M_1 R_{12}^{-\varepsilon} = \text{Id}_1 \text{Tr}(D^R M) \quad (18\delta)$$

Доказательство этого следствия является задачей 3-го листа. Формулы (18a,δ) выносятся из равенств (14a,δ). Они им эквивалентны.

Формулы (18a,δ) будут полезны в дальнейшем при исследовании свойств квадратичных матричных алгебр (см. запись лекций П. Сапонова).

Графически соотношение (18a,δ) выглядит так (при $\varepsilon = +1$):



Изучим теперь соотношение между матрица-ми C^* и D^* для косообратимых R -матриц R и R^{-1} . (11)

Def Косообратимая R -матрица R называется строго косообратимой (strict skew-invertible), если хотя бы одна из матриц D^R или C^R обратима

Утверждение 2 Равносильные утверждения:

а) R - строго косообратимая R -матрица;

б) R -матрицы R и R^{-1} косообратимы.

В случае выполнения условий а) или б) имеем:

$$C^{R^{-1}} = (D^R)^{-1}, \quad D^{R^{-1}} = (C^R)^{-1} \quad (19)$$

Док-во: а) \Rightarrow б)

Предположим для определенности, что D^R обратима.

① Докажем равенство $\text{Tr}_{(2)} R_{12} \psi_{23}^R = P_{13}$ справа на D_3^R и преобразуем:

Левая часть:

$$\text{Tr}_{(2)} R_{12} \psi_{23}^R D_3^R \stackrel{(118) \text{ правая}}{=} \text{Tr}_{(2)} R_{12} D_2^R R_{32}^{-1} = \text{Tr}_{(2)} R_{32}^{-1} R_{12} D_2^R$$

или, с-во следа

Итак, получим

$$\text{Tr}_{(2)} R_{32}^{-1} R_{12} D_2^R = P_{13} D_3^R = D_1^R P_{13}$$

2) Докажем поперечное равенство на $(D_1^R)^{-1}$ слева:

$$\text{Tr}_{(2)} R_{32}^{-1} (D_1^R)^{-1} R_{12} D_2^R = P_{13}$$

Поперечное равенство демонстрирует косообратимость R^{-1} , причем получаем выражение для $\Psi^{R^{-1}}$:

$$\Psi_{12}^{R^{-1}} = (D_2^R)^{-1} R_{21} D_1^R \quad (20)$$

3) Докажем (20) на D_2^R слева и возмем $\text{Tr}_{(1)}$:

Левая часть: $\text{Tr}_{(1)} D_2^R \Psi_{12}^{R^{-1}} = D_2^R C_2^{R^{-1}}$

Правая часть: $\text{Tr}_{(1)} R_{21} D_1^R \stackrel{(9)}{=} Id_2$

Докажем левое равенство в (19)

8) => a)

Пусть R и R^{-1} — косообратимые R -матрицы.

1) Преобразуем соотношение, доказав его слева на C_1^R .

$$\text{Tr}_{(2)} \Psi_{12}^R R_{23} = P_{13}$$

Левая часть: $\text{Tr}_{(2)} C_1^R \Psi_{12}^R R_{23} \stackrel{(11a)}{=} \text{Tr}_{(2)} R_{21}^{-1} C_2^R R_{23}$
левое

Итак: $\text{Tr}_{(2)} R_{21}^{-1} C_2^R R_{23} = C_1^R P_{13} = P_{13} C_3^R$

2) Докажем это равенство справа на $\Psi_{10}^{R^{-1}}$ и возмем $\text{Tr}_{(1)}$

Левая часть: $\text{Tr}_{(1,2)} R_{21}^{-1} \Psi_{10}^{R^{-1}} C_2^R R_{23} \stackrel{(7)}{=} \text{Tr}_{(2)} P_{02} C_2^R R_{23}$

$$\stackrel{(6)}{=} \text{Tr}_{(2)} C_0^R R_{03} P_{02} = C_0^R R_{03}$$

Правая часть: $\text{Tr}_{(1)} \Psi_{10}^{R^{-1}} P_{13} C_3^R \stackrel{(6)}{=} \text{Tr}_{(1)} P_{13} \Psi_{30}^{R^{-1}} C_3^R = \Psi_{30}^{R^{-1}} C_3^R$

В итоге получаем:

$$\boxed{C_0^R R_{03} = \Psi_{30}^{R^{-1}} C_3^R} \quad (21)$$

③ Возьмем $\text{Tr}_{(0)}$ от этого равенства:

$$\text{Tr}_{(0)} C_0^R R_{03} = \text{Tr}_{(0)} \Psi_{30}^{R^{-1}} C_3^R$$

$\parallel (9)$
 $\parallel (8)$

$$\boxed{\text{Id}_3 = D_3^{R^{-1}} C_3^R}$$

Таким образом мы убеждаемся в обратимости C_3^R и $D_3^{R^{-1}}$ (т.е. доказали строгую координатность R и R^{-1}), и получим правую формулу (19). Левая получается заменой $R \leftrightarrow R^{-1}$ во всех рассужденных выше. ▣

Рез: Формула (21) даёт ещё одну формулу для $\Psi^{R^{-1}}$ в случае строго координатной R :

$$\boxed{\Psi_{12}^{R^{-1}} = C_2^R R_{21} (C_1^R)^{-1}} \quad (22)$$

Эта формула дополняет формулу (20)

Теперь мы можем разрешить проблему, обозначившуюся на стр. 6, и установить связь между

$$\text{Tr}_{(2)} D_2^R \text{ и } \text{Tr}_{(2)} D_2^{R^{-1}} \quad (\text{Tr}_{(0)} C_1^R \text{ и } \text{Tr}_{(0)} C_1^{R^{-1}})$$

в случае реккеевской R -матрицы R .

Утверждение 3 Для строго косообратимой
реккеевской R-матрицы R выполняются соот-
ношения:

$\text{Tr } D^R = \text{Tr } C^R =: d$	(23a)
$D^R = (1 - (q - q^{-1})d) D^{R^{-1}}$	(23б)
$C^R = (1 - (q - q^{-1})d) C^{R^{-1}}$	(23в)

Док-во: Соотношение Тейке, записанное в виде

$$R_{12}^{-1} = R_{12} - (q - q^{-1}) \text{Id}_{12}$$

Докажем на D_2^R и вычислим $\text{Tr}_{(2)}$:

$$\text{Tr}_{(2)} D_2^R R_{12}^{-1} \stackrel{(9)}{=} (1 - (q - q^{-1}) \text{Tr } D^R) \text{Id}_1$$

В силу однозначности задания матрицы $D^{R^{-1}}$ свой-
ством (9) заключаем


$$D_2^R = (1 - (q - q^{-1}) \text{Tr } D^R) D^{R^{-1}} \tag{24a}$$

Аналогично возводится соотношение

$$C^R = (1 - (q - q^{-1}) \text{Tr } C^R) C^{R^{-1}} \tag{24б}$$

Докажем (24a) и (24б), соответственно, на C^R и D_2^R ,
получаем с использованием (19)

$$D^R C^R = C^R D^R = (1 - (q - q^{-1}) \text{Tr } D^R) \text{Id} = (1 - (q - q^{-1}) \text{Tr } C^R) \text{Id},$$

откуда следует $\text{Tr} C^R = \text{Tr} D^R$, а значит (24 а, б) приводятся к виду (23 б, в) (15) 

Реш При канонических преобразованиях

R-матриц: $R_{12} \mapsto \tilde{R}_{12} = (X_1, X_2)^{-1} R_{12} (X_1, X_2)$, $X \in \text{Aut}(V)$
 Ψ^R, C^R, D^R преобразуются так

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{12}^R \mapsto \tilde{\Psi}_{12}^R = (X_1, X_2)^{-1} \Psi_{12}^R (X_1, X_2), \\ C^R \mapsto \tilde{C}^R = X^{-1} C^R X, \\ D^R \mapsto \tilde{D}^R = X^{-1} D^R X, \end{array} \right. \quad (25)$$

а значит C^R и D^R могут рассматриваться как элементы пространства $\text{End}(V)$ ($\text{Aut}(V)$ в случае строго кососообразной R), т.е. безотносительно выбора базиса в V .

В заключение параграфа получим явное выражение для матриц Ψ^R, C^R, D^R в случае

Дришфельд-Дуллидовской R_{DJ} :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{DJ} = q e_{ii} \otimes e_{ii} + x_{ij} e_{ij} \otimes e_{ji} + (q - q^{-1}) e_{ii} \otimes e_{jj} \quad (26) \\ \text{где } x_{ij} x_{ji} = 1 \end{array} \right.$$

формула (10) из 1-й части записок по этой теме.

По индексам i и j подразумевается суммирование с указанным ограничением (далее в формулах действует такое же соглашение).

Как мы упоминали в 1-й части записок (17)
 про R -матрицы, R_{DT} — R -матрица $GL(N)$ типа:

$$\mathcal{P}_{R_{DT}} \left(P \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ N+1 \end{array} \right) = 0, \text{ причем } \forall k \mathcal{P}_{R_{DT}} \left(P \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ N \\ k \end{array} \right) = 1 \quad (28)$$

В дальнейшем нам потребуется естественный вид проектора $\mathcal{P}_{R_{DT}} \left(P \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ N \end{array} \right)$, поэтому сейчас давайте рассмотрим его, и докажем соотношение (28).

Как мы знаем, идемпотент $\mathcal{P}_{R_{DT}} \left(P \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ k \end{array} \right)$ "вырезает" в пространстве $V^{\otimes k}$ инвариантное подпространство (прямой суммой одного или нескольких) одномерных представлений $H_k(q) - V \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ k \end{array}$, определяющим свойством которых являются условия:

$$\left(g_i + \frac{1}{q} \text{Id} \right) V \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ k \end{array} = 0. \quad (29)$$

Размерность этого инвариантного подпространства равна рангу $\mathcal{P}_{R_{DT}} \left(P \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ k \end{array} \right)$.

Будем искать векторы, удовлетворяющие условию (29) в пространстве представления, порождаемого R_{DT} :

$$\left\{ (R_{DT})_{ii+1} + \frac{1}{q} \text{Id} \right\} \omega = 0, \text{ где } \omega \in V^{\otimes k} \quad (30)$$

$$i = 1, \dots, k-1$$

В случае $k=2$ $\omega \in V^{\otimes 2}$. Разложим ω (18)

по базису: $\omega = \sum_{i,j=1}^N \omega_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j$ (каноническое действие матричных единиц: $e_{ij} \sigma_k = \delta_{jk} \sigma_i$). Поскольку R_{DT} состоит из 1×1 и 2×2 блоков, уравнение (30) сводится к набору 1×1 и 2×2 линейных систем:

для каждого фиксированного $i = 1 \dots N$

$$(R_{DT} + \frac{1}{q} Id) \omega_{ii} \sigma_i \otimes \sigma_i = \omega_{ii} (q + \frac{1}{q}) \sigma_i \otimes \sigma_i = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega_{ii} = 0} \quad (31a)$$

для каждой пары $1 \leq i < j \leq N$

$$(R_{DT} + \frac{1}{q} Id) (\omega_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j + \omega_{ji} \sigma_j \otimes \sigma_i) =$$

$$= \omega_{ij} (\alpha_{ji} \sigma_j \otimes \sigma_i + (q - \frac{1}{q}) \sigma_i \otimes \sigma_j) + \omega_{ji} (\alpha_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j) =$$

$$+ \frac{1}{q} (\omega_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j + \omega_{ji} \sigma_j \otimes \sigma_i) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega_{ji} = -\frac{q}{\alpha_{ij}} \omega_{ij}} \quad (31b)$$

Очевидно, линейное пространство решений системы (31a, b) имеет размерность $\frac{N(N-1)}{2}$ — это число пар $\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq N$. То

есть

$$\boxed{\text{rk } \rho_{R_{DT}}(P_{\frac{1}{2}})} = \frac{N(N-1)}{2}$$

Этот проектор естественно называть q -аксимметризатором в $V^{\otimes 2}$.

Для $k=3$ условия (30) записываются так (19)

$(R_{DT})_{12}$ и $(R_{DT})_{23}$, действующих на $V^{\otimes 3}$. Они дают соотношения вида $(31, \delta)$ для компонент $\omega \in V^{\otimes 3}$ из пар соседних пространств $V_1 \otimes V_2$ и $V_2 \otimes V_3$. Решение по базису в результате имеет вид:

$$\omega = \sum_{\substack{i, j, k=1 \\ i \neq j, j \neq k, i \neq k}}^N \omega_{ijk} \psi_i \otimes \psi_j \otimes \psi_k, \text{ где}$$

$$\omega_{jik} = -\frac{q}{\alpha_{ij}} \omega_{ijk} \quad \forall i, j: i < j$$

$$\omega_{ikj} = -\frac{q}{\alpha_{jk}} \omega_{ijk} \quad \forall j, k: j < k$$

Размерность пространства таких $\omega (= rk(P_{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}))$ равна числу троек $\{i, j, k\}: 1 \leq i < j < k \leq N$, т.е. равна $\binom{N}{3}$.

Аналогичным образом получаем

$$rk P_{RDT} (P_{\begin{smallmatrix} 1 \\ \vdots \\ k \end{smallmatrix}}) = \binom{N}{k} \quad (31)$$

Частными случаями этой формулы при $k=N, N+1$ являются равенства (28).

Единственной (с точностью до скалярного множителя) вектор ω — решение (30) при $k=N$ удобно записывается в случае $\alpha_{ij} = 1 \quad \forall i, j$.

$$\omega = \sum_{\sigma \in S_N} (-q)^{\ell(\sigma)} \psi_{\sigma(1)} \otimes \psi_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes \psi_{\sigma(N)} \quad (32)$$

$\ell(\sigma)$ — длина перестановки σ

Коэффициенты вектора ω в разложении (20) по базису $\psi_{i_1} \otimes \psi_{i_2} \otimes \dots \otimes \psi_{i_N}$:

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_N} = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists \text{ пара } i_k = i_l \text{ при } k \neq l \\ (-q)^{\ell(\sigma)}, & \text{где } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ i_1 & i_2 & \dots & i_N \end{pmatrix} \end{cases} \quad (33)$$

называются компонентами q -тензора Леви-Чивита (полностью q -антисимметричный тензор ранга N на q - N -мерном пространстве V).

Матрица $A^{(N)} := \mathcal{P}_{R, D\sigma} \left(P \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \right)$, поскольку она имеет ранг 1, является произведением вектора и ковектора $\sim \omega \cdot \omega^*$, только ее следует правильно нормировать, воспользовавшись свойством

$$(A^{(N)})^2 = A^{(N)}$$

Ответ такой:

$$(A^{(N)})_{i_1 \dots i_N | j_1 \dots j_N} = q^{-\frac{N(N-1)}{2}} \frac{1}{[N]_q!} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} \varepsilon_{j_1 \dots j_N} \quad (34)$$

\uparrow
индексы
строчки
 \uparrow
индексы
столбца

Так как

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_N} = q^{\frac{N(N-1)}{2}} [N]_q!$$

$$\text{где } [N]_q! = \prod_{i=1}^N [i]_q, \quad [i]_q := \frac{q^i - q^{-i}}{q - q^{-1}}$$