Семинар 5.

В задачах 1-4 предполагается, что основное поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто и имеет характеристику $\neq 2$, $Q \subset \mathbb{P}^3$ - невырожденная квадрика по Штейнеру в $\mathbb{P}^3$, а S_1 и S_2 две серии образующих прямых на Q.

Напомним, что *полярой прямой* $l \subset \mathbb{P}^3$ *относительно квадрики* Q называется прямая $p_Q(l) = \bigcap\limits_{a \in l} p_a Q$ пересечения поляр всех точек прямой l относительно Q. На семинаре 4 мы выяснили, что $x \in l$ тогда и только тогда, когда $p_Q(l) \subset p_x Q$. Кроме того, на семинаре 5 мы разобрали решения задач к семинару 4. В частности, когда прямая l в $\mathbb{P}^3$ пересекает квадрику Q в двух различных точках x и y, мы нашли геометрическую конструкцию поляры $p_Q(l)$ прямой l по точкам x, y и сериям S_1 и S_2 образующих прямых на Q. Этой конструкцией полезно воспользоваться при решении задач 1 и 3 ниже.

Задача 1. Пусть прямая l пересекает квадрику Q в двух различных точках y_1 и y_2. Тогда, как мы знаем, ее поляра $p_Q(l)$ также пересекает квадрику Q в двух различных точках, скажем, y_3 и y_4. Выбрав систему координат в $\mathbb{P}^3$ так, что $y_1 = (1:0:0:0),\ y_2 = (0:1:0:0),\ y_3 = (0:0:1:0),\ y_4 = (0:0:0:1)$, напишите уравнение квадрики Q в этой системе координат.

Задача 2. Для точки $a \notin Q$ рассмотрим полярную плоскость $\pi = p_a Q$ и в ней конику $C = \pi \cap Q$. Для произвольной прямой l, не проходящей через точку a, обозначим через $pr_{a,\pi}(l)$ ее проецию из точки a на плоскость π, то есть прямую $\langle a, l \rangle \cap \pi$. Опишите множество прямых $\{pr_{a,\pi}(l) \mid l \in S_1 \sqcup S_2\}$ - проекций прямых из серий S_1 и S_2 на плоскость π.

Задача 3. 1) Рассмотрим две тройки различных прямых $a,\ c,\ e \in S_1$ и $b,\ d,\ f \in S_2$ и обозначим точки $A = a \cap b,\ B = b \cap c,\ C = c \cap d,\ D = d \cap e,\ E = e \cap f,\ F = f \cap a$. Эти точки образуют пространственный 6-вершинник $ABCDEF$. Докажите, что главные диагонали AD, BE, CF этого пространственного 6-вершинника пересекаются в точке.
2) Выведите отсюда и из предыдущей задачи теорему Брианшона.

Задача 4. Пусть $l,\ m,\ n,\ p$ - попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$. Нас интересуют прямые, пересекающие эти 4 прямые.
1) Если число интересующих нас прямых конечно, то сколько их может быть?
2) Может ли это число быть бесконечным?

Задача 5. Нарисуйте в $\mathbb{R}^2$ графики кривых, заданных уравнениями:
1) $y^2 = x^2(x+1)$,
2) $y^2 = x^3$,
3) $x^3 + y^3 = 1$,
4) $y^2 = x(x-1)(x-a)$, где $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0, 1$, например, $a = 2$.