

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО - 2023  
ЛИСТОК 6

1. Разложите в ряд Тейлора следующие функции и найдите области сходимости рядов:

(а)  $f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$  в точке  $z = 0$ ,

(б)  $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 5}$  в точке  $z = 1$ ,

(в)  $f(z) = \frac{z}{(1 - z)^2}$  в точке  $z = 0$  (эта функция называется *функцией Кёбе*. На что она отображает единичный диск?),

(г)  $f(z) = \sin^2 z$  в точке  $z = 0$ ,

(д)  $f(z) = \frac{e^z - z - 1}{z^2}$  в точке  $z = 0$ ,

(е)  $f(z) = \int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt$  в точке  $z = 0$ .

2. Пусть голоморфная в некотором круге с центром в нуле функция  $f(z)$  удовлетворяет уравнению  $f(z) = z + f(z^2)$ . Найдите разложение  $f(z)$  в ряд и область сходимости ряда.

3. Найдите  $f'''(0)$ , где  $f(z) = e^{\sin z}$ .

4. Найдите радиусы сходимости рядов:

(а)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$ , (б)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ , (в)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ , (г)  $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$ ,

(д)  $\sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$ .

5. Найдите суммы рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ .

6. Докажите, что в разложении  $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$  все коэффициенты  $B_n$  (числа Бернулли) с нечетными номерами равны 0 кроме  $B_1$  и найдите радиус сходимости ряда.

7. Для любого  $a \in \mathbb{C}$  положим  $(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$  (символ Похгаммера).

(а) Определите радиус сходимости ряда

$$F(a, b; c; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n.$$

(б) Докажите, что функция  $F = F(a, b; c; z)$ , задаваемая этим рядом, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z(1-z) \frac{d^2 F}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dF}{dz} - abF = 0.$$

Функция  $F(a, b; c; z)$  называется *гипергеометрической функцией*.

(в) Найдите второе решение гипергеометрического дифференциального уравнения в предположении, что оно имеет вид  $z^\alpha f(z)$ , где  $\alpha$  – константа, а  $f(z)$  голоморфна в 0.

8. Найдите все особые точки и определите их характер у следующих функций: (а)  $\frac{1}{1 - \sin z}$ , (б)  $\frac{z}{\sin(z^3)}$ , (в)  $\operatorname{ctg}(1/z)$ , (г)  $\frac{1}{e^{z^2} + 1}$ ,  
(д)  $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$ , (е)  $\frac{z^3}{\sin^2 \frac{\pi}{z+1}}$ .