7 Лекция 7. Колебания мембраны и уравнения Бесселя

7.1 Колебания прямоугольной мембраны

См. раздел 6.1.8 учебника.

7.2 Спектральная задача для оператора Лапласа в круге и функции Бесселя

Рассмотрим колебания круглой мембраны, закрепленной на границе. Они описываются волновым уравнением

$$u_{tt} = \Delta u$$

с граничным условием Дирихле

$$u|_{r=r_0} = 0$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x),$$

$x \in D$, где D - круг радиуса r_0. Согласно общей теории, нам нужно рассмотреть спектральную задачу для оператора Лапласа в круге D с условиями Дирихле. Когда эта задача будет решена, мы найдем отрицательные собственные значения оператора Лапласа $-\omega_k^2$ и соответствующие собственные функции w_k (каждое собственное значение пишется столько раз, какова его кратность). Общее решение волнового уравнения примет вид

$$u(t,x) = \Sigma_1^{\infty} w_k(x)(a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t),\ x \in D,\ t \in \mathbb{R}.$$

Перейдем к решению спектральной задачи.

$$\Delta w = \lambda w, \tag{1}$$

$$w_{\partial D} = 0, \tag{2}$$

считая для простоты радиус круга равным 1. Решения задачи для круга произвольного радиуса r_0 получаются заменой $x \mapsto r_0 x$.

Задачу (1), (2) будем решать методом разделения переменных. А именно, функцию w будем искать в полярных координатах r, φ в виде

$$w(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

Оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta w = w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi}$$

(докажите это!). Подставляя в уравнение (1) предыдущее выражение для w, получаем:

$$R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = \lambda R\Phi. \tag{3}$$

Ниже мы докажем, что все собственные значения λ задачи (1),(2) отрицательны: $\lambda = -\omega^2$. Умножая уравнение (3) на $\frac{r^2}{R\Phi}$, получаем:

$$\frac{r^2R" + rR' - \lambda r^2 R}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0.$$

Первая дробь зависит только от r, вторая только от φ. Если сумма двух функций от разных переменных равнв нулю, то обе они константы. Начнем с уравнения

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = const,\ \Phi \in C^2(S^1).$$

Эту задачу мы уже решили:

$$\frac{\Phi"}{\Phi} = -n^2,\ \Phi(\varphi) = a\cos n\varphi + b\sin n\varphi.$$

Итак,

$$r^2R'' + rR' + (\omega^2 r^2 - n^2)R = 0 \tag{4}$$

$$R(1) = 0. \tag{5}$$

Эту задачу нужно решить для каждого $n = 0, 1, \ldots$. Ниже мы докажем, что уравнение (4) для каждого n имеет единственное (с точностью до пропорциональности) решение, аналитическое в окрестности нуля (и на всей вещественной и даже комплексной) прямой.

Замечание 1 *Отметим, что $r^2R'' + rR' = (r\frac{d}{dr})^2 R$. Оператор $r\frac{d}{dr}$ переходит в себя при линейной замене $\rho = \omega r$. Поэтому уравнения* (4) *при такой замене переходят друг в друга; меняется только значение ω.*

Положим $\rho = \omega r$. Переобозначив ρ через r, из уравнения (4) получим n-е уравнение Бесселя:

$$r^2R'' + rR' + (r^2 - n^2)R = 0. \tag{6}$$

Теорема 1 *Уравнение* (6) *имеет единственное (с точностью до пропорциональности) решение, аналитическое на всей оси. Это решение имеет бесконечно много нулей, расстояние между которыми стремится к π, когда $x \to \infty$, и ноль порядка n в нуле.*

Эта теорема доказана в последних двух разделах.

Обозначим через J_n решение уравнения Бесселя (6), аналитическое на всей прямой и нормированное условием $J_n^{(n)}(0) = \frac{1}{2^n}$. Это решение называется n-й функцией Бесселя.

Графики функции J_0, J_1, J_2 показаны на рис. 6.1 учебника.

Напомним, что сжатие аргумента $r \mapsto \omega r$ переводит функцию Бесселя J_n в решение уравнения (4), см. замечание 1. Упорядочим положительные нули функции J_n по возрастанию: $\omega_{n,1} < \omega_{n,2} < \ldots$ Тогда функция $J_{n,j}(r) = J_n(\omega_{n,j} r)$ является решением уравнения (4) с $\omega = \omega_{n,j}$ и удовлетворяет краевому условию $J_{n,j}(1) = 0$. Итак,

$$\lambda = -\omega_{n,j}^2 \tag{7}$$

собственные значения оператора Лапласа с условиями Дирихле в единичном круге, а

$$w_{0,j} = J_0(\omega_{0,j} r), \tag{8}$$

$$w_{n,j}(r,\varphi) = J_n(\omega_{n,j} r)(a \cos n\varphi + b \sin n\varphi)) \tag{9}$$

– собственные функции этого оператора. Собственные значения $-\omega_{0,j}^2$ однократны, $-\omega_{n,j}^2$ при $n > 0$ двукратны.

Оказывается, эти формулы дают *все* собственные значения и собственные функции оператора Лапласа на круге с условиями Дирихле на границе. Этот оператор самосопряжен и отрицательно опрелделен. Действительно,

$$(\Delta u, v) = -\int_D (\mathrm{grad} u, \mathrm{grad} v).$$

Поэтому его собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны. Более того, собственные функции этого оператора образуют базис в пространстве $L^2(D_1)$. Доказательства этих утверждений выходят за рамки нашей книги.

7.3 Колебания мембраны

Решив спектральную задачу для уравнения Лапласа в круге, мы тем самым решили задачу о колебаниях круглой мембраны. Эти колебания выражаются рядом

$$u(t,r,\varphi) = \sum_{n,j} J_{n,j}(\omega_{n,j} r)[\sin n\varphi(a_{n,j} \cos \omega_{n,j} t + b_{n,j} \sin \omega_{n,j} t) + \cos n\varphi(c_{n,j} \sin \omega_{n,j} t + d_{n,j} \cos \omega_{n,j} t]$$

Форма мембраны в кругах разного радиуса при $t = \frac{\pi}{2}$ показана на рис. 6.3, 6.4 учебника.

7.4 Ряды для функций Бесселя

Будем искать решения уравнения Бесселя в виде суммы ряда

$$J_n(r) = \sum_0^\infty a_k r^k. \tag{10}$$

Начнем со случая $n = 0$; $J_0(0) = 1$. Отметим, что

$$rJ_n' = \sum_0^\infty k a_k r^k,\ r^2 J_n'' = \sum_0^\infty k(k-1) a_k r^k,$$

Тогда из уравнения

$$r^2 J_0'' + rJ_0' + r^2 J_0 = 0$$

следует:

$$k^2 a_k = -a_{k-2} \tag{11}$$

Поскольку коэффициенты a_{-2}, a_{-1} отсутствуют, при $k = 0$ получаем: $0 \cdot a_0 = 0;\ a_0 = 1$ этому соотношению удовлетворяет. Отсюда же следует, что $a_1 = a_3 = ... = 0$. В свою очередь, коэффициенты с четными номерами легко вычисляются по рекуррентной формуле (11) с учетом соотношения $a_0 = 1$. Это вычисление нам не нужно. Поскольку $\frac{a_{2(k-2)}}{a_{2k}} \to 0$ при $k \to \infty$ радиус сходимости ряда (10) при $n = 0$ бесконечен. Для справки

$$a_{2k} = \frac{-1}{2^k (k!)^2},\ a_{2k+1} = 0.$$

Аналогично вычисляется ряд (10) для J_n при $n > 0$. Подстановка ряда в уравнение (6) похожа на предыдущую, но в левой части соотношения (11) появляется дополнительный член:

$$(k^2 - n^2) a_k = -a_{k-2}. \tag{12}$$

При $k < n$ из соотношений $a_{-2} = a_{-1} = 0$ получаем по индукции: $a_k = 0$. При $k = n$ получим: $0 \cdot a_n = 0$. Берем $a_n = \frac{1}{2^n n!}$. Отсюда следует: коэффициенты с номерами $n+2k$ находятся из формулы (12) рекуррентно; коэффициенты $a_{n+2k+1} = 0$. Как и в случае J_0,

$$\frac{a_{n+2k}}{a_{n+2(k+1)}} = -\frac{1}{(n+2k)^2 - n^2} = -\frac{1}{4k(k+n)} \to 0$$

при $m \to \infty$. Значит, радиус сходимости ряда (10) равен бесконечности. Для справки:

$$a_n = \frac{1}{2^n n!},\ a_{n+2k} = \frac{(-1)^k}{2^{n+2k} k!(n+k)!},\ a_{n+2k+1} = 0.$$

7.5 Нули функций Бесселя

См. раздел 6.2.3 учебника (будет рассказано в начале лекции 8).