07.03.2023

# СЕМИНАР 9

## Примеры вариационных задач II.

Напомним некоторые основные определения и обозначения объектов и величин, встречающихся в вариационных задачах. Мы будем рассматривать различные пространства $\mathcal{A}$ вещественнозначных функций и отображения $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ этих пространств в вещественные числа. Такие отображения $\Phi$ называются вещественными функционалами.

Пусть $y_0(x)$ — некоторая функция из области определения функционала $\Phi$. Любую другую функцию $y(x)$ из области определения $\Phi$ можно представить в виде

$$y(x) = y_0(x) + \delta y(x).$$

Разность $\delta y(x) = y(x) - y_0(x)$ назвается *вариацией* аргумента функционала в "точке" $y_0(x)$. Как правило, функциональное пространство $\mathcal{A}$ является аффинным пространством (например, $\mathcal{A}$ — подмножество функций $\mathcal{A} \subset C^k[a,b]$ с фиксироваными граничными значениями на одном или обоих концах $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$), тогда вариация аргумента $\delta y(x)$ — элемент соответствующего линейного пространства. В этом случае можно определить понятие *вариации* (дифференциала) функционала $\Phi$.

**Определение.** Зафиксируем функцию $y_0(x) \in \mathcal{A}$. Для любой другой функции $y_0(x) + \delta y(x) \in \mathcal{A}$ назовем разность

$$\Delta\Phi = \Phi[y_0(x) + \delta y(x)] - \Phi[y_0(x)]$$

*приращением* функционала в точке $y_0(x)$ отвечающим вариации аргумента $\delta y(x)$.

Если приращение $\Delta\Phi$ можно представить в виде

$$\Delta\Phi = \delta\Phi_{y_0}[\delta y(x)] + \phi_{y_0}[\delta y(x)],$$

где $\delta\Phi_{y_0}[\delta y(x)]$ — *линейный* функционал от $\delta y(x)$, а функционал $\phi_{y_0}[\delta y(x)]$ удовлетворяет требованию

$$\lim_{||\delta y|| \to 0} \frac{\phi_{y_0}[\delta y(x)]}{||\delta y(x)||} = 0, \tag{1}$$

то фунционал $\Phi$ называется *дифференцируемым* в точке $y_0(x)$, а линейная часть приращения $\delta\Phi$ называется *дифференциалом* или *вариацией* функционала $\Phi$ в точке $y_0(x)$. Здесь $||\delta y(x)||$ — норма на линейном пространстве вариаций $\delta y(x)$.

В полной аналогии с анализом функций вводятся понятия (локального) минимума и максимума функционала $\Phi$.

**Определение.** Функционал $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ имеет в точке $y_0(x) \in \mathcal{A}$ локальный максимум (минимум) если существует окрестность $U_{y_0} \subset \mathcal{A}$ (в смысле метрики, индуцированной нормой в линейном пространстве вариаций) такая, что для $\forall\, y(x) \in U_{y_0}$ выполнено неравенство $\Phi[y(x)] < \Phi[y_0(x)]$ (соответственно, $\Phi[y(x)] > \Phi[y_0(x)]$).

Если функционал $\Phi$ дифференцируем в некоторой окрестности $U_{y_0}$, то необходимым условием локального экстремума (максимума или минимума) в точке $y_0(x)$ является обращение в нуль дифференциала $\delta\Phi_{y_0}[\delta y(x)] = 0$ на *любой* (достаточно малой) вариации

$\delta y(x)$. Этот факт служит основным техническим инструментом для поиска возможных точек экстремума (экстремалей) функционала $\Phi$.

Проиллюстрируем все эти понятия, а также поиск экстремали, на простом примере.

**Пример 1.** Рассмотрим подмножество $\mathcal{A} \subset C^2[0,1]$ дважды непрерывно дифференцируемых вещественных функций на отрезке $[0,1] \subset \mathbb{R}$ вещественной прямой с фиксированным значением на правом конце отрезка $y(1) = 3/2$, $\forall\, y(x) \in \mathcal{A}$. Значение $y(0)$ может быть любым.

Рассмотрим следующий функционал на пространстве $\mathcal{A}$:

$$\Phi[y(x)] = y^2(0) + \int_0^1 \Big(6xy(x) + (y'(x))^2\Big)\, dx,$$

где символ $y'(x)$ означает первую производную от функции $y(x)$.

Данный функционал дифференцируем в любой точке $y(x) \in \mathcal{A}$. Действительно, найдем приращение в произвольной фиксированной точке $y(x)$, отвечающее вариации аргумента $\delta y(x)$ $\Delta\Phi = \Phi[y + \delta y] - \Phi[y]$:

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= 2y(0)\delta y(0) + (\delta y(0))^2 + \int_0^1 \Big(6x\delta y + 2y'\delta y' + 2(\delta y')^2\Big)\, dx = \\
&= \underline{2y(0)\delta y(0) + \int_0^1 (6x\delta y + 2y'\delta y')\, dx} + \phi_y[\delta y],
\end{aligned}$$

где во второй строчке мы выделили линейную по вариации $\delta y$ часть приращения $\Delta\Phi$ — это и есть дифференциал $\delta\Phi_y[\delta y(x)]$ данного функционала в точке $y(x)$, а оставшаяся часть

$$\phi_y[\delta y(x)] = (\delta y(0))^2 + 2\int_0^1 (\delta y')^2 dx$$

очевидно удовлетворяет условию малости (1) по отношению к норме

$$||\delta y(x)|| = \sup_{x\in[0,1]} \left(|\delta y(x)| + |\delta y'(x)| + |\delta y''(x)|\right).$$

Таким образом, мы доказали, что функционал $\Phi$ всюду дифференцируем на множестве $\mathcal{A}$ и нашли его дифференциал в произвольной точке $y(x)$. Преобразуем выражение для дифференциала $\delta\Phi_y[\delta y(x)]$, проинтегрировав по частям последнее слагаемое под интегралом, чтобы избавиться от производной у вариации $\delta y(x)$. При этом учтем, что у функций из нашего пространства $\mathcal{A}$ фиксировано значение в точке $x = 1$, поэтому $\delta y(1) = 0$:

$$\begin{aligned}
\delta\Phi_y[\delta y(x)] &= 2y(0)\delta y(0) + \int_0^1 (6x\delta y + 2y'\delta y')\, dx = \\
&= 2y(0)\delta y(0) + 2y'(x)\delta y(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 (6x - 2y'')\delta y\, dx \\
&= 2\Big(y(0) - y'(0)\Big)\delta y(0) + \int_0^1 (6x - 2y'')\delta y\, dx.
\end{aligned}$$

Таким образом, экстремаль функционала $\Phi$, на которой дифференциал обращается в нуль при любой вариации $\delta y(x)$, является решением следующей *краевой задачи*:

$$y''(x) - 3x = 0, \qquad y(0) = y'(0), \qquad y(1) = 3/2.$$

Общее решение дифференциального уравнения находится элементарно:

$$y(x) = \frac{x^3}{2} + C_1 x + C_2,$$

учет граничных значений фиксирует произвольные константы и мы получаем окончательный ответ:

$$y(x) = \frac{x^3 + x + 1}{2}.$$

Отметим еще раз, что хотя функции из пространства $\mathcal{A}$ зафиксированы только на одной границе отрезка $[0, 1]$, мы, тем не менее, получаем недостающее граничное условие из требования обращения в нуль дифференциала $\delta\Phi_y$ при любых вариациях $\delta y(x)$.

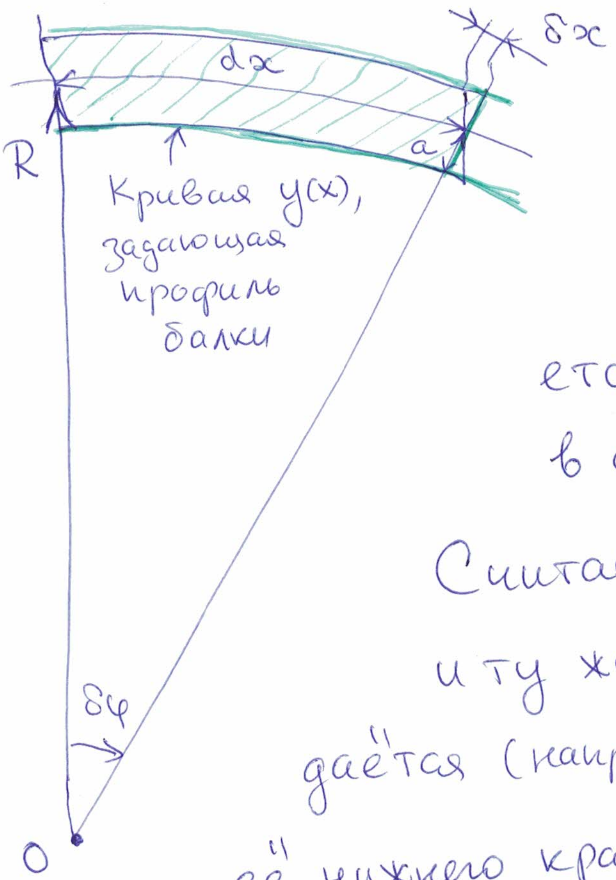
# Примеры вариационных задач

Вариационная задача со старшими производными.

## Задача о прогибе балки.

Рассмотрим балку в однородном поле тяжести. Изначально она лежала горизонтально, опираясь на концы, но под действием силы тяжести прогнулась вниз. Считаем, что прогиб незначителен, и в балке возникают силы упругой деформации изгиба, компенсирующие действие силы тяжести. Это задача из статики. Кинетической энергии у балки нет, поэтому принцип наименьшего действия утверждает, что балка примет конфигурацию, в которой её потенциальная энергия имеет экстремум. Этот экстремум будет минимумом (в задачах статики устойчивому положению равновесия всегда соответствует минимум потенциальной энергии). А у действия этот экстремум будет максимумом ($S = -U$), что ещё раз подчёркивает, что в принципе наименьшего действия мы интересуемся любыми экстремалями, не выясняя, минимумы они или максимумы.

Итак, оценим в 1-м приближении потенциальную энергию балки.




Рассмотрим небольшой отрезок балки длиной $dx$ (см. Рис). Под действием силы тяжести балка искривляется. $R$ – радиус кривизны балки в окрестности ее отрезка $dx$.

Считаем, что балка везде имеет одну и ту же толщину $2a$, её профиль задаётся (например) кривой $y(x)$ — высотой её нижнего края.

Кусок балки $dx$ виден из центра касательной к нему окружности под углом $\delta\varphi$:

$$dx = R\,\delta\varphi$$

Под действием силы тяжести правый, висящий край куска балки снизу сжимается, а сверху растягивается на величину $\delta x = a\,\delta\varphi$ (см. Рис)

Относительная деформация слоя балки

$$\Delta = \frac{\delta x}{dx} = \frac{a}{R} \sim R^{-1}$$

Энергия упругой деформации куска балки единичной длины (т.е. линейная плотность энергии деформации)

$$U_{упр} = \frac{k\Delta^2}{2} \sim R^{-2},$$ где

$k$ – коэфф. упругости, зависящий от материала балки.

Из анализа вспоминаем формулу кривизны кривой $y(x)$:

$$\boxed{R^{-1}(x) = \frac{y''(x)}{(1+y'^2(x))^{3/2}} \cong y''(x)}$$ в первом

приближении, когда $y'(x) \ll 1$.

Получаем, что энергия упругой деформации куска балки $dx$

$$\delta U_{упр}(x) \cong \frac{\varkappa}{2}(y''(x))^2 dx,$$

где $\varkappa$ – коэффициент, зависящий от толщины балки и от материала, из которого она сделана.

Энергия этого же куска в поле тяжести

$$\delta U_{тяж}(x) = \rho g\, y(x)\, dx,$$

где $\rho$ – линейная плотность балки.

Предполагая балку однородной, мы считаем, что $\rho$ и $\varkappa$ – константы, не зависящие от $x$.

Функционал потенциальной энергии балки имеет вид:

$$\boxed{U[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\varkappa y''^2}{2} + \rho g y\right) dx} \qquad (1)$$

С точностью до переобозначений $x \mapsto t$, $y(x) \mapsto q(t)$ это функционал действия $S[q(t)]$ (1) из Лекции 7.

Его экстремаль является решением дифура (3) (стр3. Лекции 7). В данном случае это:

$$\boxed{y'''' + \frac{\varrho g}{\varkappa} = 0} \qquad (2)$$

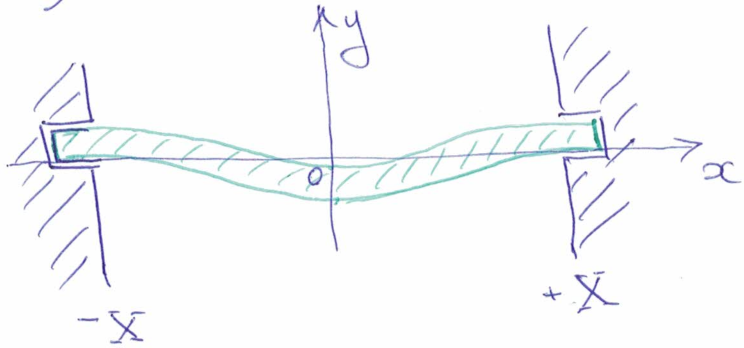
Его общее решение:

$$\boxed{y(x) = -\frac{\varrho g}{\varkappa}\frac{1}{4!}x^4 + P_3(x),} \qquad (3)$$

где $P_3(x)$ произвольный многочлен 3-й степени по $x$.

Форма балки определяется тем, что происходит с её концами.

а) Балка – межэтажное перекрытие




Концы балки горизонтально вбетонированы в стены.

Выбирая систему отсчёта так, что левый/правый конец балки имеют координату $-X/+X$ по оси $O\vec{x}$ и $0$ по оси $O\vec{y}$, имеем граничные условия

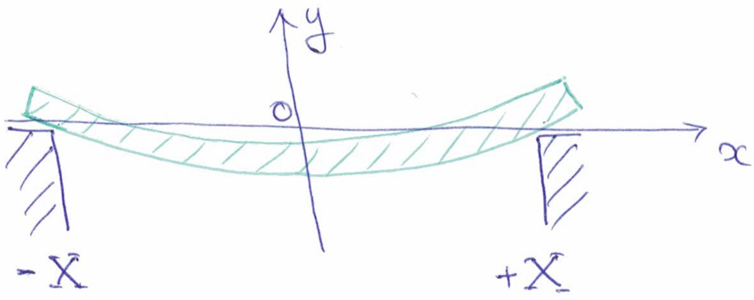
$$\boxed{y(\pm X) = 0, \quad y'(\pm X) = 0} \qquad (4a)$$

Это граничные условия типа (4а) из Лекции 7 (см стр 3)

Многочлен 4-й степени по $x$, у которого при $x = \pm X$ имеются нули 2-го порядка, это

$$\boxed{y(x) = -\frac{\varrho g}{4!\,\varkappa}(x-X)^2(x+X)^2} \qquad (5)$$

## б) Балка – мостик




Концы балки свободно лежат на двух опорах

Опять выберем систему отсчёта, где края балки имеют координаты $\pm X$ по оси $O\vec{x}$, и $0$ по оси $O\vec{y}$ (мы на самом деле учитываем таким образом симметрию задачи: $y(x)$ будет чётной функцией $x$)

$$\boxed{y(\pm X)=0\,, \quad y'(\pm X) - \forall} \quad \text{– наклон концов произволен} \qquad (6а)$$

Это граничные условия типа (4в1) (см. Лекцию 7, стр 3)
Недостающие 2 граничных условия дают формулы (4в2) /Лекция 7, стр 4/:

$$\frac{\partial}{\partial y''}\left(\frac{\varkappa y''^2}{2}+\rho g y\right)\Bigg|_{x=\pm X} = \varkappa y''\Bigg|_{x=\pm X} = 0 \qquad (6б)$$

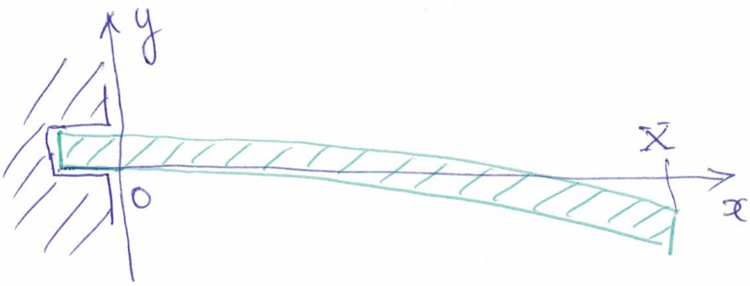
Удовлетворяющую этим условиям чётную функцию $x^2$, зануляющуюся при $x=\pm X$, легко определить, выбрав анзац:

параметр

$$\boxed{y(x) = -\frac{\rho g}{4!\,\varkappa}(x^2-X^2)(x^2-A)} \qquad (7)$$

Оказывается, $y''(\pm X)=0$ при $\boxed{A = 5X^2}$

в) <u>Балка - балкон</u>. Один конец балки вбетонирован горизонтально в стену, другой свободно висит.




В этом случае выберем началом координат вбетонированный конец балки. Имеем граничные условия

$$\boxed{y(0)=y'(0)=0\ , \quad y(X), y'(X) - \forall} \quad (8a)$$

На левом конце это условия, как в варианте а), на правом конце - полная свобода

$\forall \delta y'(X)$ - как в (4в2) Лекции 7 (стр 4)

$$\frac{\partial}{\partial y''}\left(\frac{\varkappa y''^2}{2}+\rho g y\right)\Bigg|_{x=X}=0 \iff \boxed{y''(X)=0} \quad (8в)$$

$\forall \delta y(X)$ - как в (4с2) Лекции 7 (стр 4)

$$\left(\frac{\partial}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y''}\right)\left(\frac{\varkappa y''^2}{2}+\rho g y\right)\Bigg|_{x=X}=0 \iff \boxed{y'''(X)=0} \quad (8c)$$

Выбирая в качестве анзаца полином, имеющий ноль 2-го порядка при $x=0$

$$\boxed{y(x) = -\frac{\rho g}{4!\,\varkappa}\,x^2\,(x^2 - Ax + B)}$$

нетрудно проверить, что $y''(X)=y'''(X)=0$ для

$$\boxed{A = 4X\ , \quad B = 6X^2} \quad (9)$$