Механика 2023

Домашнее задание № 5

Срок сдачи задания: до конца дня **27.03.23**

---

1. Функционал
$$S[y(x)] = \int_0^1 \Big((y''(x))^2 + 5(y'(x))^2 + 4y^2(x) \Big)\, dx$$
задан на пространстве функций $y(x) \in C^4[0,1]$ с фиксированными граничными условиями $y'(0) = 0$, $y(1) = -3$.

а) Найдите экстремаль функционала $S[y(x)]$, то есть функцию $y(x) \in C^4[0,1]$, на которой дифференциал функционала тождественно равен 0.

б) На том же пространстве функций найдите экстремаль функционала
$$F[y(x)] = S[y(x)] + 6y'(1).$$

2. Функционал
$$\Phi[y(x)] = 2y(\alpha) + \int_0^1 \Big(y^2 + (y')^2 \Big)\, dx,$$
где $0 < \alpha < 1$ – фиксированная *внутренняя* точка отрезка $[0,1]$, задается на множестве непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций с заданными значениями на границах: $y(0) = y(1) = 0$.

а) Определите подпространство $\mathcal{A} \subset \{f \in C^0[0,1] : f(0) = f(1) = 0\}$ функций, на котором функционал Φ корректно определен, дифференцируем, и имеет экстремаль (т.е., уточните свойства гладкости функций подпространства $\mathcal{A}$ так, чтобы задача поиска экстремали $\Phi[y(x)]$ имела решение).

б) Найдите экстремаль функционала Φ на подпространстве $\mathcal{A}$.

3. Один конец *невесомой* упругой балки закрепили горизонтально в начале координат. На втором конце закрепили точечную массу m. Длина балки L. Вся система находится в однородном поле тяжести $\vec{g}$, направленном вертикально вниз (рис. 1). Определите форму балки $y(x)$ в состоянии равновесия, полагая, что линейная плотность потенциальной энергии ее упругой деформации определяется формулой $\kappa(y'')^2/2$.

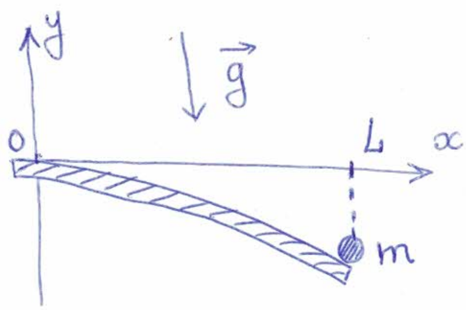

Рисунок 1.

4. Частица массы $m = 1$ скользит без трения по поверхности сферы радиуса R в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения $\vec{g}$ (модель сферического маятника). Определите силу реакции $\vec{N}$, действующую на частицу со стороны сферы, и выразите $\vec{N}$ в виде функции координт частицы и ее энергии. При решении задачи используйте метод множителей Лагранжа, введя в лагранжиан свободной частицы связь $f(\vec{r}) = R^2 - \vec{r}^2 = 0$.

5. Среди плоских кривых фиксированной длины $\ell > 2a$ начинающихся в точке $(-a, 0)$ и заканчивающихся в точке $(a, 0)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, найдите кривую, которая вместе с отрезком $[-a, a]$ оси абсцисс ограничивала бы наибольшую площадь (рис. 2). При решении задачи ограничьтесь классом кривых, лежащих внутри полосы $x \in [-a, a]$ и задаваемых неотрицательными функциями $y(x) \in C^2[-a, a]$ *(Такого ограничения можно избежать, рассмотрев задачу в полярных координатах, однако решение вариационной задачи при этом станет более громоздким.)* При решении используйте метод множителей Лагранжа.

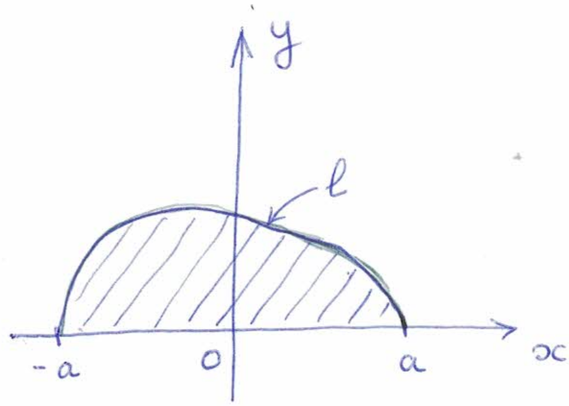

Рисунок 2.

а) Найдите общее решение дифференциального уравнения на экстремаль этой вариационной задачи (в нем множитель Лагранжа – один из параметров).

б) Найдите связь множителя Лагранжа λ и параметров задачи a и ℓ.

в) Предъявите явный вид решения $y(x)$ в случае $\ell = \pi a/\sqrt{2}$.