Семинар 6.

Задача 1. Нарисуйте в $\mathbb{R}^2$ графики кривых, заданных уравнениями:
1) $y^2 = x^2(x+1)$,
2) $y^2 = x^3$,
3) $x^3 + y^3 = 1$,
4) $y^2 = x(x-1)(x-a)$, где $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0, 1$, например, $a = 2$.
Укажите все особые точки на этих кривых.

Задача 2. 1) Пусть $F(x_1, ..., x_n)$ - функция, дифференцируемая по каждому из своих аргументов x_i, то есть, определены частные производные $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, и пусть x_i, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями от переменной s, то есть определены обычные производные $x_i'(s)$. (Напомним, что производная $f'(x)$ функции $f(x)$ также обозначается в классических обозначениях через $\frac{df}{dx}$. В частности, $\frac{dx_i}{ds} = x_i'(s)$.) Рассмотрим сложную функцию $f(s) = F(x_1(s), ..., x_n(s))$. Проверьте, что

$$\frac{df}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_i(s)) \frac{dx_i}{ds}.$$

Задача 3. Пусть $F(x) = F(x_0, ..., x_n) \in \mathbf{k}[x_0, ..., x_n]$ - форма (т.е. однородный многочлен) от переменных $x_0, ..., x_n$. В проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ с однородными координатами $(x_0 : ... : x_n)$ рассмотрим гиперповерхность $X = V(F) = \{x = (x_0 : ... : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid F(x) = 0\}$. *Полярой* точки $a = (a_0 : ... : a_n) \in \mathbb{P}^n$ относительно гиперповерхности X называаеться гиперповерхность $P_a(X)$ с уравнением

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0.$$

Точка $b \in X$ называется *особой точкой* гиперповерхности X, если $\frac{\partial F}{\partial x_i}(b) = 0$ для всех $i,\ 0 \leqslant i \leqslant n$.
На семинаре 6 мы установили, что для произвольной точки $a \in \mathbb{P}^n$ ее поляра $P_a(X)$ относительно X проходит через все особые точки гиперповерхности X.
Проверьте это для кривых 1)-3) из первой задачи и какой-нибудь точки a плоскости.

Задача 4. Для гладкой плоской кубической кривой X, заданной в аффинных координатах x, y уравнением в нормальной форме Вейерштрасса $y^2 = x(x-1)(x-b),\ b \neq 0, 1$, найдите какую-нибудь точку a с вещественными координатами x, y, через которую проходят 6 различных вещественных касательных прямых к X, и нарисуйте их.

Задача 5. Функция $F(x_1, ..., x_n)$ называется *однородной фунцией степени* $\mathbf{d}$, если для произвольного скаляра λ верно равенство $F(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^d F(x_1, ..., x_n)$. Докажите, что если однородная фунция F степени $\mathbf{d}$ дифференцируема по каждому из своих аргументов x_i, то справедлива следующая *теорема Эйлера об однородных функциях*:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = \mathbf{d}F.$$