

Анализ на многообразиях 2021. Программа. Вопросы билетов ко второму коллоквиуму

1. Векторные расслоения. Описание расслоения с помощью коцикла отображений перехода. Построение расслоения по коциклу отображений перехода.
2. Операции над расслоениями: двойственное, прямая сумма, тензорное произведение.
3. Сечения векторных расслоений. Тривиальные расслоения. Коцикл тривиального расслоения. Критерий тривиальности расслоений в терминах сечений.
4. Тавтологическое расслоение над вещественным проективным пространством. Нетривиальность канонического расслоения над $\mathbb{R}P^1$
5. Касательное и кокасательное расслоения. Структура многообразий. Коциклы отображений перехода. Сечения.
6. Тензорная алгебра векторного пространства. Кососимметрические тензоры и внешние формы. Внешняя алгебра векторного пространства. Тензорное произведение линейных операторов. Внешняя степень линейного оператора.
7. Тензорные расслоения. Тензорные поля и сечения тензорных расслоений. Координаты тензорных полей. Свертка тензоров
8. Дифференциальные формы. Внешнее умножение дифференциальных форм. Подстановка векторного поля. Обратный образ дифференциальной формы при отображении многообразий.
9. Поток векторного поля. Свойства потока. Связь с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Поток на компактном и некомпактном многообразии.
10. Производная Ли векторного поля. Связь с коммутатором векторных полей.
11. Производная Ли 1 формы. Вывод формулы в координатах. Свойства. Правило Лейбница и производная Ли k -формы.
12. Внешний дифференциал. Существование и единственность. Координатная запись
13. * Формула Картана для производной Ли дифференциальной формы вдоль векторного поля
14. Обратный образ дифференциальной формы при отображении многообразий. Перестановочность с внешним дифференциалом.
15. Разбиение единицы. Вложение гладкого компактного многообразия в \mathbb{R}^n .
16. Интегрирование дифференциальных форм.
17. Многообразия с краем. Инвариантность края. Структура гладкого многообразия края.
18. Ориентированное многообразие с краем. Построение ориентации края, согласованной с ориентацией многообразия.
19. Общая формула Стокса

20. Поток векторного поля через поверхность. Формула Остроградского-Гаусса как частный случай общей формулы Стокса. Дивергенция векторного поля и ее геометрический смысл

21. Формула Стокса в \mathbb{R}^3 как частный случай общей формулы Стокса. Ротор векторного поля и его геометрический смысл.

22. Формулы Грина как частный случай общей формулы Стокса. Приложение формулы Грина и общей формулы Стокса к вычислению площадей и объемов.

23. Градиент, дивергенция, ротор. Определения, геометрический смысл. Связь с соответствующими операциями над дифференциальными формами.

24. Замкнутые и точные формы. Когомологии де Рама дифференцируемого многообразия. Поведение когомологий де Рама при отображении многообразий. Когомологии де Рама \mathbb{R}^1 .

25. Лемма Пуанкаре. Когомологии де Рама \mathbb{R}^n .

26. Гомотопическая инвариантность когомологий де Рама.

27. * Вычисление когомологий n мерной сферы. Двойственность Пуанкаре (без доказательства).

Вопросы 13 и 27 только для претендующих на отличную оценку

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.А.Зорич, Математический Анализ II, МЦНМО 2012
- [2] С.М.Натанзон, Введение в теорию гладких многообразий, МЦНМО 2020
- [3] С.П.Новиков, И.А.Тайманов, Современные геометрические структуры и поля, МЦНМО 2005
- [4] Ф.Уорнер, Основы теории гладких многообразий и групп Ли, Бибматфиз 1987
- [5] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения МЦНМО, 2020
- [6] Арнольд В.И. Математические методы классической механики Наука 1989
- [7] Спивак М. Математический анализ на многообразиях Мир 1986
- [8] Ботт Р., Ту, Л.В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии, Платон 1997