8 Лекция 8. Устойчивость и неустойчивость: функции Ляпунова и Четаева.

8.1 Устойчивость функция Ляпунова

Раздел 8.1.3. Материал осеннего курса: разделы 8.1.4 и 8.1.5.

8.2 Неустойчивость функция Четаева

Раздел 8.1.7 до низа стр. 396. После этого текст:

Функцию Четаева мы будем искать в виде неположительно определенной квадратичной формы (пример - функция $x^2 - y^2$ на плоскости).

Лемма 1 *Линейная лемма. Пусть оператор $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет хотя бы одно собственное значение по модулю большее единицы. Тогда существует квадратичная форма C и скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$ и такие $q > 1, r > 0$, что*

$$C(Bx) \geq qC(x) + rx^2. \tag{1}$$

Здесь через x^2 обозначен скалярный квадрат вектора x.

Последнее слагаемое в неравенстве (1) нужно для того, чтобы компенсировать разницу между отображением и его линейной частью в нуле.

Доказательство Пусть все собственные значения оператора B по модулю больше единицы. Тогда наша лемма следует из линейной леммы 1 (в теореме ол устойчивости по Ляпунову).

Пусть оператор B имеет собственные значения как большие, так и меньшие единицы по модулю. Разложим $\mathbb{R}^n$ в прямую сумму B-инвариантных пространств

$$\mathbb{R}^n = T^+ \bigoplus T^-.$$

Ограничение B на T^+, обозначаемое B^+, имеет все собственные значения по модулю больше единицы. Ограничение B на T^-, обозначаемое B^-, имеет все собственные значения по модулю не больше единицы Пусть $\dim T^+ = k$. Обозначим k-мерную координату на T^+ через v, $n-k$-мерную координату на T^- через w.

Введем на $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение, пользуясь линейной леммой 1 так, что для некоторых $q > 1, r > 0$

$$(B^+v)^2 \geq (q+r)v^2, (B^-w)^2 \leq (q-r)w^2, \tag{2}$$

и пространства T^+, T^- ортогональны. В частности, если $x = (v, w)$, то $x^2 = v^2 + w^2$.

Теперь определим функцию Четаева: для $x = (v, w)$

$$C(x) = v^2 - w^2.$$

Докажем (1):

$$C(Bx) = (C(B^+v))^2 - (C(B^-w))^2 \geq (q+r)v^2 - (q-r)w^2 = q(v^2 - w^2) + r(v^2 + w^2) = qC(x) + rx^2.$$

Линейная лемма доказана. □

Следующее общее предложение позволяет сравнивать значения квадратичной формы в точках образа отображения и его линейной части вблизи нуля.

Предложение 1 *Пусть C – произвольная квадратичная форма (не обязательно (1)) и*

$$F(x) = Bx + R(x), R(x) = o(x)$$

при $x \to 0$. Тогда

$$C(F(x)) = C(Bx) + o(x^2).$$

Доказательство Любая квадратичная форма имеет вид: $C(x) = (Ax, x)$, где $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - линейный оператор. Тогда

$$C(F(x)) = (ABx + AR(x), Bx + R(x)) = (ABx, Bx) + (ABx, R(x)) + (AR(x), F(x)) =$$

$$C(Bx) + (ABx, R(x)) + (AR(x), F(x)) = C(Bx) + o(x^2),$$

поскольку $AR(x) = o(x), F(x) = O(x)$. Отсюда получаем предложение. □

Вывод теоремы о неустойчивости из нелинейной леммы. Докажем, что

$$C(F(x)) \geq qC(x), \;\; q > 1$$

-то же, что в линейной лемме. Возьмем окрестность нуля столь малой, что

$$|C(F(x)) - C(Bx)| \leq rx^2.$$

Тогда

$$C(F(X)) \geq C(Bx) - rx^2 \geq qC(x)$$

в силу (1). Теорема о неустойчивости для отображений доказана.