10 семинар, 14 февраля 2023

---

1. Найдите экстремаль функционала

$$S[y(x)] = \int_0^1 \Big(2(y')^2 + y^2/2 + e^x(2y' - y)\Big)\,dx,$$

заданного на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций $y(x) \in C^2[0,1]$ с фиксированным граничным значением $y(1) = \sqrt{e} - e$ (число e — основание натуральных логарифмов) и произвольным значением $y(0)$.

2. Найдите экстремаль функционала

$$S[y(x)] = \int_0^{\pi/2} \Big((y'')^2 - y^2 + 8y''e^{x-\pi/2}\Big)\,dx,$$

заданного на пространстве функций $y(x) \in C^4[0,\pi/2]$ с фиксированными граничными значениями:

$$y'(0) = 0, \qquad y'(\pi/2) = -1, \qquad y(\pi/2) = e^{-\pi/2} - \pi/2,$$

и произвольным значением $y(0)$.

Решения.

№1 $S[y]=\int_0^1\left(2(y')^2+\frac{y^2}{2}+e^x(2y'-y)\right)dx$

$y(1)=\sqrt{e}-e$

Решение:

Уравнение Э.-Л.:

$4y''-y=-3e^x$

Недостающие гран. условие:

$\frac{\partial L}{\partial y'}\Big|_{x=0}=(4y'+2e^x)\Big|_{x=0}=4y'(0)+2=0$

$$\boxed{\begin{gathered}y''-\frac{1}{4}y=-\frac{3}{4}e^x\\ y(1)=\sqrt{e}-e\quad y'(0)=-\frac{1}{2}\end{gathered}}$$

(частное $y_r=-e^x$)

Общее решение.

$y(x)=Ae^{x/2}+Be^{-x/2}-e^x$

Гран. условия дают: =2=

$$\begin{cases} A\sqrt{e} + \frac{B}{\sqrt{e}} - e = \sqrt{e} - e \quad (y(1)) \\ A/2 - B/2 - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{A = B+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$\underline{B = 0 \quad A = 1}$

<u>Ответ</u>: $\boxed{y(x) = e^{x/2} - e^{x}}$

№2 $S[y] = \int_0^{\pi/2} \left((y'')^2 - y^2 + 8y'' e^{x-\pi/2}\right) dx$

$y'(0) = 0 \quad y'(\pi/2) = -1 \quad y(\pi/2) = e^{-\pi/2} - \pi/2$

<u>Решение:</u>

Уравнение Эйл.-Лагр.:

$$y^{(4)} - y = -4e^{x-\pi/2}$$

Недостающее гран. условие:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y''}\right)\right]_{x=0} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y'''(0) + 4e^{-\pi/2} = 0}$$

ФСР однородного:

$e^x,\ e^{-x},\ \cos x,\ \sin x.$

Квазимногочлен справа: αe^x — $\alpha = -4e^{-\pi/2}$

— корень кратности 1 в показателе $\Rightarrow$

анзац $y_r(x) = A x e^x$

$(xe^x)' = e^x(x+1)\quad (xe^x)'' = e^x(x+2)\ldots$

$$\frac{d^k}{dx^k} xe^x = e^x(x+k) \Rightarrow$$

$$A e^x(x+4) - Axe^x = -4e^{x-\pi/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A = -e^{-\pi/2}\qquad \boxed{y_r = -xe^{x-\pi/2}}$$

Общее решение:

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + C\cos x + D\sin x - xe^{x-\pi/2}$$

Гран. условия:

$$\left.\begin{aligned}
y'(0)&:\ A - B + D - e^{-\pi/2} = 0\\
y'(\pi/2)&:\ Ae^{\pi/2} - Be^{-\pi/2} - C - \left(\frac{\pi}{2}+1\right) = -1\\
y(\pi/2)&:\ Ae^{\pi/2} + Be^{-\pi/2} + D - \pi/2 = e^{-\pi/2} - \pi/2\\
y'''(0)&:\ A - B - D - 3e^{-\pi/2} = -4e^{-\pi/2}
\end{aligned}\right\}$$

Из 1го и 4го уравнений $\Rightarrow$ сразу получаем $A = B$

$D = e^{-\pi/2}$

Третье уравнение:

$$A\left(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}\right) + e^{-\pi/2} - \pi/2 = e^{-\pi/2} - \pi/2 \Rightarrow$$

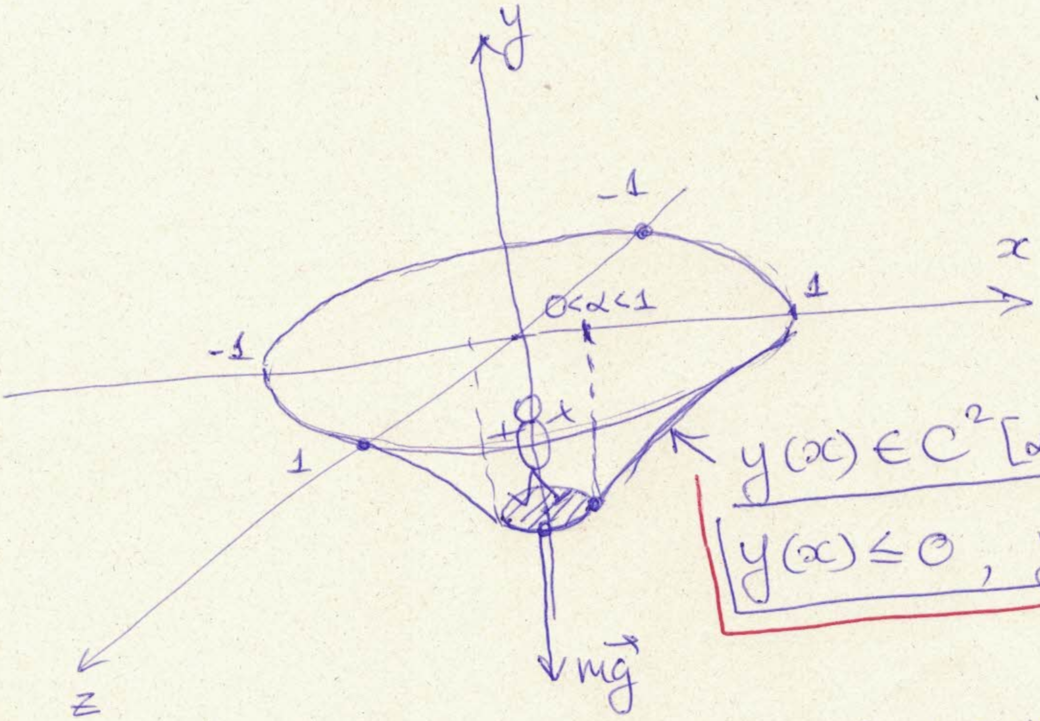
$\Rightarrow \underline{A = B = 0}$

~~Четве~~ Второе уравнение:

$C = -\pi/2$

Ответ: $\boxed{y(x) = e^{-\pi/2}\sin x - \frac{\pi}{2}\cos x - x e^{x - \frac{\pi}{2}}}$

Задача про прыгуна на батуте



$y(x) \in C^2[\alpha, 1]$

$\boxed{y(x) \leq 0, \quad y(1) = 0}$

На круглый батут радиуса $R = 1$ в его центр кладут круглую невесомую площадку радиуса α, и на нее ставят человека массы m. Сила тяжести $m\vec{g}$ действует против оси $\vec{Oy}$

Выяснить, насколько опустится прыгун, и каков будет профиль $y(x)$ батута в состоянии равновесия

Решение: Надо вычислить потенциальную энергию системы $U[y(x)]$ и минимизировать ее.

Считаем, что энергия батута $\sim$ его площади

$$U_{упр}[y(x)] = \varkappa \int_{\alpha}^{1} \underbrace{2\pi x}_{\text{периметр кругового конуса}} \underbrace{\sqrt{1+y'^2}\,dx}_{\text{образующая кругового конуса}}$$

коэффициент, характеризующий жёсткость батута

②

$$U_{\text{тяж}}[y(x)] = mg\, y(\alpha)$$

координата человека

Общая пот энергия

$$\boxed{U[y(x)] = mg\, y(\alpha) + \int_\alpha^1 2\pi\varkappa\, x\sqrt{1+y'^2}\, dx} \quad (1)$$

$$\delta U = mg\,\delta y(\alpha) + \int_\alpha^1 2\pi\varkappa\, x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,\delta y'(x)\, dx =$$

$$= mg\,\delta y(\alpha) + 2\pi\varkappa\left(x\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,\delta y(x)\right)\Bigg|_{x=\alpha}^{x=1} -$$

$$- \int_\alpha^1 2\pi\varkappa\left(x\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)'\delta y(x)\, dx$$

Гран. условия: (2)

$$y(1) = 0 \Rightarrow \delta y(1) \equiv 0$$

$y(\alpha) = \forall \Rightarrow$ коэфф при $\delta y(\alpha)$: $\boxed{mg - 2\pi\varkappa\,\alpha\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Bigg|_{x=\alpha} = 0}$

$\boxed{\text{Rem}}$ Видно, что если бы мы положили $\alpha = 0$ (точечная масса в центре батута), то это условие было бы неразрешимо.

Дифур: $\left(x\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)' = 0$ имеет очевидный интеграл движения — закон сохранения импульса, отвечающего координате $y(x)$

$$x\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

(т.к. у нас $x>0$, $y'\geq 0$, то $C\geq 0$)

$$\Updownarrow$$

$$y'^2(x^2-C^2)=C^2$$

$$\boxed{y' = \frac{C}{\sqrt{x^2-C^2}}} \qquad (3)$$

Разделим переменные

$$dy = \frac{C\,dx}{\sqrt{x^2-C^2}}$$

Интегрируется заменой $x = C\,\mathrm{ch}\,\varphi(y)$:

$$dy = C\,d\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{y}{C}+\varphi_0$$

Ответ общий

$$\boxed{x = C\,\mathrm{ch}\left(\frac{y}{C}+\varphi_0\right)} \qquad (4)$$

похож на профиль мыльной плёнки, как и ожидалось.

Для нахождения констант C и φ_0 решим сначала гран. условие при $x=\alpha$ (2).

Учитывая (3) имеем $\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \dfrac{C}{x}$, и гран. условие (2) имеет вид:

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sqrt{1+y'^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2-C^2}}}$$

$$mg - 2\pi\varkappa\,\cancel{\alpha}\cdot\frac{C}{\cancel{\alpha}} = 0$$

Не зависит от α!!

$$\boxed{C = \frac{mg}{2\pi\varkappa}} \qquad (5)$$

выражение для C

Теперь разрешаем гран условие при $x = 1$:

$$y(1) = 0$$

$\Downarrow$ (подставляем в (4)

$$1 = C\,\mathrm{ch}(\varphi_0)\text{, т.е.}$$

$$\boxed{\mathrm{ch}(\varphi_0) = \frac{1}{C} = \frac{2\pi\varkappa}{mg}} \qquad (6)$$

выражение для φ_0

Это гран условие (т.к $\mathrm{ch}(x) \geq 1$) разрешимо только если $\boxed{C \leq 1}$. Итак, задача решается только если прыгун достаточно лёгок

$$\boxed{C \leq 1 \Leftrightarrow mg \leq 2\pi\varkappa}$$

Условие разрешимости

Если (6) разрешимо, то у него 2 решения φ_0, отличающихся знаком. Нам подходит $\varphi_0 > 0$, т.к. именно для такого φ_0 в формуле (4) для профиля батута при уменьшении y от 0 в отрицательную область x тоже уменьшается от 1. Обратим также внимание, что (4) при каких угодно отрицательных значениях y

$$x \geq C = \frac{mg}{2\pi\varkappa} \leq 1$$

То есть, размер площадки α мы не можем выбирать сколь угодно малым

$$\boxed{1 \geq \alpha \geq \frac{mg}{2\pi\varkappa}}$$

Условие разрешимости задачи (7)

Рисунок профиля батута (4)

при условиях (5), (6), (7)