Теория функций комплексного переменного - 2023
листок 7

1. С помощью интегральной формулы Коши вычислите интегралы (а) $\int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2-1}$, (б) $\int_{|z-a|=a} \frac{z dz}{z^4-1}$, $a > 1$, (в) $\int_{|z-1|=1} \frac{z e^z dz}{(z-1)^3}$.

2. Пусть $f(z)$ – голоморфная функция в верхней полуплоскости, непрерывно продолжаемая на вещественную ось, причем $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. Докажите интегральную формулу Шварца

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im} f(x)}{x-z}\, dx.$$

3. Пусть $f(z)$ – голоморфная функция в единичном круге, непрерывно продолжаемая на его границу. Докажите интегральную формулу Пуанкаре

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re} f(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\theta + i\mathrm{Im} f(0).$$

4. Найдите вычеты дифференциальных форм в их особых точках: а) $\frac{z dz}{z^2+1}$, б) $\frac{e^z dz}{(z-1)^2}$, в) $\frac{z dz}{\sin^2 z}$, г) $\frac{z^{2n} dz}{(z-1)^n}$, д) $\frac{e^{1/z} dz}{1-z}$, е) $\sin z \sin(1/z)\, dz$, ж) $\frac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z\,(\sin z - z)}\, dz$ в точке $z = 0$, з) $z^2 \sin \frac{1}{z+1}\, dz$, и) $\frac{dz}{z(e^{2z}-1)}$ в точке $z = 0$, к) $e^{z/(1-z)} dz$.

5. Докажите, что для четной функции $f(z)$ имеет место равенство

$$\mathrm{res}_{z=a} f(z) dz = -\mathrm{res}_{z=-a} f(z) dz$$

а для нечетной

$$\mathrm{res}_{z=a} f(z) dz = \mathrm{res}_{z=-a} f(z) dz$$

6. Вычислите интегралы: а) $\oint_{|z|=4} \frac{z^4 dz}{e^z+1}$, б) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{(2z+1)^2(z+2)}$, в) $\oint_{|z|=1} (z+1) e^{1/z} dz$, г) $\oint_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{2z^4+1}$, д) $\oint_{|z|=3} \frac{z^3-1}{z-1} \left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}} \right) dz$, е) $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{e^{2/z} - e^{1/z}}$, ж) $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2(1-\cos z)}$, з) $\oint_{|z|=1} \frac{z - (\log 2)^{-1}}{e^{1/z}-2}\, dz$.

7. Пусть функция $f(z)$ регулярна в замыкании конечной области D, а точки $a_1, \ldots, a_n$ лежат в D и попарно различны. Обозначим $P(z) = (z-a_1)\ldots(z-a_n)$ и

$$\Phi(z) = -\frac{P(z)}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\xi)}{P(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - z}, \quad z \notin D.$$

Докажите, что функция $\Phi(z)$ аналитически продолжается на всю плоскость и представляет собой многочлен степени $n-1$, причем $\Phi(a_k) = f(a_k)$, $k = 1, \ldots, n$. (Многочлен $\Phi(z)$ называется интерполяционным многочленом Лагранжа.)