Тема: R-матрицы и инварианты зацеплений (1)

§1 R-матричные представления группы кос

Помимо тривиального одномерного представления B_n:

$$g_i \longmapsto x \quad \forall x \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

хорошо известно представление фактор-группы B_n — симметрической группы S_n матрицами перестановки. Оно определяется на n-мерном пространстве U с базисом $\{u_i\}_{i=1\ldots n}$, элементы которого и переставляются:

$$\boxed{\forall \pi \in S_n : \quad \pi \circ u_i = u_{\pi(i)}} \qquad (1)$$

Для артиновых генераторов S_n — σ_i имеем представление

$$\sigma_i \circ u_j = \begin{cases} u_{i+1}, & \text{если } j = i \\ u_i, & \text{если } j = i+1 \\ u_j & \forall j \neq i, i+1, \text{ т.е.} \end{cases} \qquad (2)$$

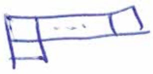
$$\sigma_i \longmapsto \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & i & i+1 & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}} & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathrm{Aut}(U)$$

Это представление приводимо:

$$U = V_{\boxed{1|\ldots|n}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} 1 & \ldots & n-1 \\ n & & \end{smallmatrix}}$$

Одномерное "тождественное" представление действует на подпространстве, натянутом на вектор

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} u_i \quad : \quad \sigma_i \circ \omega = \omega$$

$(n-1)$-мерное неприводимое представление, отвечающее диаграмме , действует на подпространстве с базисом

$$\tilde u_i = u_i - \omega\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

В 1936 г. Вернер Бурау (Werner Burau) обобщил представление (1), введя в матрицы (2) параметр t:

$$b_i \longmapsto \begin{array}{r} \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & i+1 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & 1 & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (3а)$$

Артиновы генераторы B_n в представлении Бурау удовлетворяют квадратичному соотношению

$$(b_i - 1)(b_i + t\cdot 1) = 0\,,$$

поэтому изменением масштаба $b_i \mapsto \frac{1}{q} b_i$ и заменой параметра $t \mapsto 1/q^2$ представление Бурау можно сделать представлением алгебры Гекке $H_n(q)$:

$$\boxed{g_i \longmapsto \begin{array}{r} \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & i+1 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} q & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & q & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda & x \\ x^{-1} & 0 \end{matrix}} & & \\ & O & & & q & \\ & & & & & \ddots \; q \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{matrix} \lambda := q - q^{-1}, \\ q, x \in \mathbb{C}\setminus\{0\}. \end{matrix} \qquad (3б)}$$

Здесь параметр x появляется за счёт смены масш-

таба базисных векторов V: $u_i \mapsto \tilde{u}_i = x^i u_i$.
Для представления Бурау параметр x несущественен.
Мы его ввели для удобства дальнейших построений.

Проверить, что (3б) задаёт представление $H_n(q)$ и построить его разложение в прямую сумму неприводимых предлагается в 1-й задаче 3-го листка.

$\boxed{\text{Rem.}}$ Представление Burau замечательно тем, что оно является точным (faithful) для B_2 и B_3 (доказал Burau), т. е. различные заплетения 2-х и 3-х нитей представляются разными матрицами Burau.

В течение 1993–1999 г. было доказано, что представление Burau неточно для B_n, $n \geq 5$. (S. Bigelow)

Вопрос о точности представления Burau для B_4 остается открытым.

Ещё один интересный факт о представлении Burau: оно связано с полиномом Александера – инвариантом узлов.

Однако представление Burau для нас слишком мало: содержит только 2 простейших представления алгебры Гекке. Будем искать обобщение:

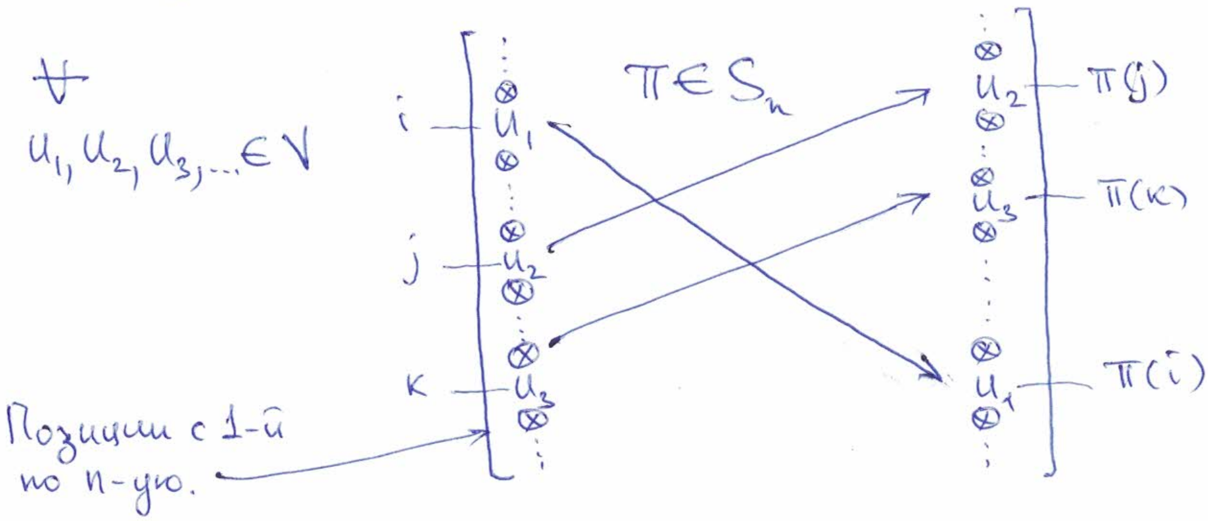
В представлении симм. группы S_n (1) перестановки π переставляют базисные вектора представления:

$$u_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - i \quad \xrightarrow{\pi} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \pi(i),$$

т.е., фактически мы перемещаем один объект – "1" –

между и возможными позициями.

Давайте перемещать не один, а множество — целое линейное пространство V, $\dim V = N > 1$, объектов между и позициями:



Получаем представление S_n, задаваемое одним! оператором перестановки:

$$\boxed{P \in \mathrm{Aut}(V\otimes V) : P(u\otimes v) = v\otimes u \quad \forall u, v \in V} \quad (4)$$

Действие артиновых генераторов S_n — σ_i — на $V^{\otimes n}$:

$$\boxed{\sigma_i \longmapsto P_{i\,i+1} = \mathrm{Id}_V^{\otimes(i-1)} \otimes P \otimes \mathrm{Id}_V^{\otimes(n-i-1)} \qquad (5)}$$

В простейшем случае $\dim V = 2$, взяв любой базис в V — $\{v_1, v_2\}$, и выбрав базис $\{v_1\otimes v_1, v_1\otimes v_2, v_2\otimes v_1, v_2\otimes v_2\}$ в $V^{\otimes 2}$ имеем:

$$P \longmapsto \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 11 & 12 & 21 & 22 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \hline \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

(индексы базисных векторов $V^{\otimes 2}$.

По аналогии с представлением Бурау (см (2) и (3б)) матрицу оператора P обобщим, введя параметры q и x:

$$\boxed{R := \left(\begin{array}{cc|cc} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q-q^{-1} & x & \cdot \\ \hline \cdot & x^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{array}\right)} \qquad (6)$$

Мы получили первый неочевидный пример, так называемой R-матрицы.

Def Матрица оператора $R \in \mathrm{Aut}(V \otimes V)$ в некотором выбранном базисе $\{v_i \otimes v_j\}_{i,j=1..N} \in V^{\otimes 2}$, где $\{v_i\}_{i=1..N}$ — базис в V, называется <u>R-матрицей</u>, если для нее верно соотношение

$$\boxed{R_{12} R_{23} R_{12} = R_{23} R_{12} R_{23},} \qquad (7)$$

где $R_{12} := R \otimes Id_V$ и $R_{23} = Id_V \otimes R$ — матрицы операторов в $V^{\otimes 3}$.

Соотношение (7) называется <u>уравнением Янга-Бакстера</u> (Yang-Baxter) или <u>соотношением кос</u>.

Всякая R-матрица порождает представление цепочки групп кос B_n, $n = 2, 3, \ldots$:

$$\boxed{\begin{aligned} B_n &\xrightarrow{\rho_R} \mathrm{Aut}(V^{\otimes n}) \\ b_i &\longmapsto R_{i\,i+1} := Id_V^{\otimes(i-1)} \otimes R \otimes Id_V^{\otimes(n-i-1)} \end{aligned}} \qquad (8)$$

Такое представление называется <u>R-матричным</u>

Нетрудно убедиться, перемножая матрицы 8×8:

$$R_{12} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 111 & 112 & 121 & 122 & 211 & 212 & 221 & 222 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} q & \cdot & & & & & & \\ \cdot & q & & & & & & \\ \hline & & \lambda & \cdot & x & \cdot & & \\ & & \cdot & \lambda & \cdot & x & & \\ \hline & & x^{-1} & \cdot & & & & \\ & & \cdot & x^{-1} & & & & \\ \hline & & & & & & q & \cdot \\ & & & & & & \cdot & q \end{array}\right] \end{array} \quad \text{и} \quad R_{23} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 111 & 112 & 121 & 122 & 211 & 212 & 221 & 222 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} q & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \lambda & x & \cdot & & & & \\ \hline \cdot & x^{-1} & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & q & & & & \\ \hline & & & & q & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \lambda & x & \cdot \\ \hline & & & & \cdot & x^{-1} & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{array}\right] \end{array},$$

что матрица R из (6) является R-матрицей.

Более того, R-матрица (6) удовлетворяет соотношению Гекке:

$$(R - q\,\mathrm{Id}_{V^{\otimes 2}})(R + q^{-1}\,\mathrm{Id}_{V^{\otimes 2}}) = 0, \tag{9}$$

а значит она задает представление цепочки алгебр Гекке $H_n(q)$.

Такие R-матрицы называются гекковскими.

Отличительная особенность R-матричных представлений $B_n \xrightarrow{\rho_R} \mathrm{Aut}(V^{\otimes n})$ в

⊛ локальность: любой артинов генератор b_i в представлении ρ_R действует нетождественно лишь на паре соседних пространств $V_i \otimes V_{i+1}$

⊛ однородность: все генераторы b_i действуют на своих пространствах $V_i \otimes V_{i+1}$ одинаково — с помощью матрицы R

Rem1: Имеются представления групп кос, в которых условия локальности и однородности ослаблены. Они связаны с так называемыми "динамическими R-матрицами".

Rem 2: Представления Вигам $H_n(q)$ вложены в R-матричное представление (6), причём многократно. Действительно, для $\forall$ пары базисных векторов $v_i, v_j \in V$ $(i \neq j)$ действие представления ρ_R, порождаемого R-матрицей (6), на вектор $\underbrace{v_i \otimes v_j \otimes \ldots \otimes v_j}_{(n-1)\text{ раз}}$ порождает n-мерное пространство представления Вигам.

Обобщение примера (6) на случай пространства V произвольной размерности $N \geq 2$ — R-матрица Дринфельда-Джимбо:

$$\boxed{R_{DJ} = \sum_{i=1}^{N} q\, e_{ii} \otimes e_{ii} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} x_{ij}\, e_{ij} \otimes e_{ji} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} (q-q^{-1})\, e_{ii} \otimes e_{jj}} \quad (10)$$

Здесь $\{e_{ij}\}$ — базис матричных единиц в $\mathrm{End}(V)$, а параметры $x_{ij} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ удовлетворяют условиям

$$\boxed{x_{ij}\, x_{ji} = 1} \quad (11)$$

Предпреждение: матричные элементы R-матрицы (10) в базисе $v_i \otimes v_j$:
$$\boxed{R(v_{j_1} \otimes v_{j_2}) = \sum_{i_1, i_2} (v_{i_1} \otimes v_{i_2}) R_{i_1 j_1 ; i_2 j_2}}$$

$R_{i_1 j_1 ; i_2 j_2}$ — коэффициент в (10) при $e_{i_1 j_1} \otimes e_{i_2 j_2}$.

В матрице R он стоит на пересечении столбца с номером "$j_1 j_2$" и строки с номером "$i_1 i_2$".

Проверка в лоб соотношений Янга–Бакстера для R-матриц (10) — это занятие для компьютера. Более рациональная тактика — обратить внимание на блочно-диагональную структуру R-матрицы Дринфельда–Джимбо: она состоит из 1×1 и 2×2 блоков вида

$$\begin{array}{cc} & ii \\ ii & [\,q\,] \end{array} \qquad i<j \quad \begin{array}{ccc} & ij & ji \\ ij & \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{cc} (q-q^{-1}) & x_{ij} \\ \frac{1}{x_{ij}} & 0 \end{array}\right]} \\ ji & & \end{array}.$$

Для матриц из левой и правой части уравнения YB (7) общие блоки на диагонали таковы:

	номер строки	номер столбца	
1×1	iii	iii	— (7) выполняется тождественно
3×3	$\left\{\begin{matrix} iij \\ iji \\ jii \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} iij \\ iji \\ jii \end{matrix}\right\}$, $i\neq j$	— (7) — это соотношения кос для представления Burau_3.
6×6	$\{ijk$ и их перестановки$\}$	$\{ijk$ и их перестановки$\}$ $i\neq j\neq k$	— новые соотношения, требующие проверки

Таким образом $\forall N$ требуется проверить лишь однотипные соотношения для 6×6 матриц.

Обсудим произвол в задании R-матриц.

Замена базиса в V $\{v_i\} \to \tilde{v}_i = \sum_j v_j X_{ji}$ не влияет на уравнения YB, и приводит к преобразованию R-матрицы:

$$\boxed{R \to \tilde{R} = (X_1)^{-1}(X_2)^{-1} R\, X_1 X_2} \quad (12)$$

где $X = \| X_{ij} \|$, $X_1 = X \otimes \mathrm{Id}_V$, $X_2 = \mathrm{Id}_V \otimes X$

(12) называется калибровочным (gauge) преобразованием R-матрицы, оно задает класс эквивалентных R-матриц.

Замена базиса в $V \otimes V$, вообще говоря, нарушает уравнение YB, именно поэтому мы говорим о R-матрице, а не о R-операторе в пространстве $\mathrm{Aut}(V \otimes V)$.

Существует семейство нетривиальных преобразований подобия

$$R \longmapsto R^F = F R F^{-1} \quad (13)$$

где F – матрица оператора из $\mathrm{Aut}(V \otimes V)$

не нарушающих уравнений YB. Здесь F удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} F_{12} F_{23} F_{12} = F_{23} F_{12} F_{23} & \text{— т.е. } F \text{ — R-матрица} \\ F_{12} F_{23} R_{12} = R_{23} F_{12} F_{23} & \\ F_{23} F_{12} R_{23} = R_{12} F_{23} F_{12} & \end{cases} \quad (14)$$

(последние два — соотношения твиста (twist))

Условия (14) гарантируют выполнение уравнения YB для матрицы R^F (проверьте), а преобразование называется преобразованием дринфельдовского твиста (Drinfeld twist).

Задача нахождения твистующих матриц F не легче задачи решения уравнения YB, так что твист — не банальное преобразование и не считается преобразованием эквивалентности.

Для R-матриц (10) диагональные $\boxed{F = \sum_{i,j=1}^{N} f_{ij}\, e_{ij} \otimes e_{ij}}$ являются матрицами твиста, и они позволяют "избавиться" от параметров x_{ij} в (10) : добиться $x_{ij}=1$

Приведем примеры других R-матриц.

A R-матрицы Кулиша-Склянина (1980)

отличаются от R-матриц Дринфельда-Джимбо лишь появлением коэффициентов $-q^{-1}$ вместо q на диагонали. В случае $\dim V = 2$:

$$R_{KS} = \left(\begin{array}{cc|cc} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q-q^{-1} & x & \cdot \\ \hline \cdot & x^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{q} \end{array}\right)$$

В общем случае: $\dim V = N + M$:

$$R_{KS} = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i q^{\varepsilon_i} e_{ii}\otimes e_{ii} + \sum_{i\neq j} x_{ij}\, e_{ij}\otimes e_{ji} + \sum_{i<j} (q-q^{-1})\, e_{ii}\otimes e_{jj}$$

где $x_{ij}x_{ji} = 1$, $\varepsilon_i = \begin{cases} +1 & i = 1\dots N \\ -1 & i = N+1\dots N+M \end{cases}$ (15)

ε_i называется чётностью базисного вектора v_i

(Б) R-матрица Риттенберга (V. Rittenberg, 1990-е)

$\dim V = 2$

$$R_R = \left(\begin{array}{cc|cc} q & \cdot & \cdot & \omega(q) \\ \cdot & q-q^{-1} & x(q) & \cdot \\ \hline \cdot & \frac{1}{x(q)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1/q \end{array}\right) \qquad (16)$$

Здесь $x(q)$ и $\omega(q)$ необходимо подобрать так, чтобы выполнялось уравнение YB (это одна из задач листка)

R_R была обнаружена в связи с приложениями R-матриц в теории стохастических процессов диффузии-аннигиляции.

(В) R-матрица Кремлера-Жерве (Cremmer-Gervais конец 1980-х)

$\dim V = 3$

$\lambda := q - q^{-1}$

$$R_{CG} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 11 & 12 & 13 & 21 & 22 & 23 & 31 & 32 & 33 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} q & & & & & & & & \\ & \lambda & & 1 & & & & & \\ & & \lambda & \cdot & -\frac{x}{q} & & q^{-1} & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & 1 & \cdot & 0 & & & \cdot & & \\ & & 0 & & q & & 0 & & \\ & & \cdot & & & x & \cdot & 1 & \cdot \\ \hline & & q & \cdot & qx & \cdot & 0 & & \\ & & & & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \cdot & & & q \end{array}\right] \end{array} \qquad (17)$$

В этой R-матрице впервые появился 3×3 блок с индексами $13, 22, 31$. Эта R-матрица, как и все предыдущие, является гекковской, т.е. удовлетворяет соотношению Гекке (9).

(Г) Негекковская R-матрица, ортогональная (тип $O(3)$)

$$R_{O(3)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} q & & & & & & & & \\ & \lambda & & 1 & & & & & \\ & & \lambda(1-\frac{1}{q}) & & \frac{\lambda y}{q} & & \frac{1}{q} & & \\ \hline & 1 & & 0 & & & & & \\ & & \lambda/y & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \lambda & & 1 & \\ \hline & & \frac{1}{q} & & 0 & & 0 & & \\ & & & & & 1 & & 0 & \\ & & & & & & & & q \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \dim V = 3 \\ \lambda := q - q^{-1} \\ \forall y \neq 0 \end{array} \tag{18}$$

Эта R-матрица удовлетворяет кубическому соотношению

$$\boxed{(R - q\,Id_{V^{\otimes 2}})(R + q^{-1}Id_{V^{\otimes 2}})(R - q^{-2}Id_{V^{\otimes 2}}) = 0}$$

и реализует R-матричные представления серии алгебр Бирман-Мураками-Венцля $BMW_n(q, \kappa = q^{-2})$.

У R-матриц из примеров (Б), (В), (Г) тоже имеются обобщения, действующие в пространствах размерности $N > 2, 3$.

Мы привели наиболее простые примеры R-матриц в пространствах размерности $\dim V = 2, 3$. Однако классификации всех решений уравнений YB (7), насколько мне известно, нет даже в размерности $\dim V = 3$.

Тем не менее, хотя бы для гекковских R-матриц навести какой то порядок на множестве их решений можно.

Известно, что для R-матриц Дринфельда - Джимбо (10) а также и для R-матриц Кулиша - Скленина (15), если выбрать достаточно большое пространство представления: $\dim V = N \geq n$ для (10), $\dim V = N+M$: $NM \geq n$ для (15) то в R-матричном представлении будут представлены все неприводимые представления $H_n(q)$ — оно будет точным.

Однако, если зафиксировать $\dim V$, то с ростом n всегда наступит момент, что ρ_R $H_n(q) \longrightarrow End(V^{\otimes n})$ перестанет быть точным. Действительно $\dim H_n = n!$ растет с ростом n быстрее $\dim End(V^{\otimes n}) = (\dim V)^{2n}$

В полупростом случае (т.е. при некоторых ограничениях на q) ядро представления обязательно порождается (одним или несколькими) примитивными идемпотентами P_α, где α - стандартная таблица формы $\lambda \vdash n$

(объясните, почему?)

Для R-матриц Дринфельда-Джимбо (10) ядро порождается таблицей-столбцом с $(N+1)$ клетками

$$\boxed{\rho_{R_{DJ}}\left(P_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \vdots\\ \hline N+1\\ \hline\end{array}}\right)=0.} \qquad (19)$$

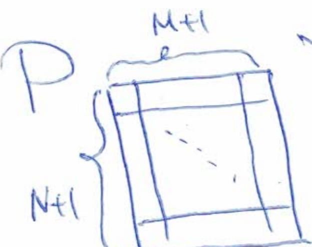
Далее, все неприводимые представления алгебр Гекке $H_n(q)$, $n\geq N+1$, отвечающие диаграммам Юнга, имеющим более N строк, лежат в ядре $\rho_{R_{DJ}}$. Гекковские R-матрицы, порождающие представления с таким ядром, называются <u>R-матрицами типа $GL(N)$</u>. К таким относятся R_{DJ} и R_{CG} Креммера-Жерве (17), но не только они. Название происходит из наблюдения, что порождаемые ими представления $H_n(q)$ связаны <u>двойственностью Шура-Вейля</u> с представлениями <u>линейных квантовых групп $GL_q(N)$</u>. В случае $q=1$ $R_{DJ}=P$ и мы имеем обычную двойственность представлений симметрической группы S_n — ρ_P — и представлений группы Ли $GL(N)$ на пространстве $V^{\otimes n}$, $\dim V = N$.

Заметим, что при дополнительном условии <u>косой обратимости</u> (см. записки лекций далее) для гекковских R-матриц типа $GL(N)$ выполняется соотношение

$$\boxed{\mathrm{rk}\, \rho_R\left(P_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \vdots\\ \hline N\\ \hline\end{array}}\right)=1} \qquad (20)$$

Именно с этим проектором ранга 1 связано понятие детерминанта как классических ($q=1$), так и квантовых матриц (см. далее лекции Сапонова П.). Оно позволяет определить понятие обратной матрицы (т.е. отображения антипода в алгебрах Хопфа) и задавать серии квантовых групп $SL_q(N)$. R-матрицы R_{DJ} (10) и R_{CG} (17) обладают свойством (20).

R-матрицы Кулиша-Склянина (15) и Ритенберга (16) относятся к другому типу гекковских R-матриц. Ядро, порождаемого R_{KS} (15) представления $H_n(q)$ порождается идемпотентом, отвечающим прямоугольной диаграмме высоты $(N+1)$ и ширины $(M+1)$:

$\rho_{R_{KS}}\big(P$  $\big) = 0$ (21)

В случае R_R (16) ядро порождается 2×2 диаграммой , т.е. $N=M=1$. Такие R-матрицы относятся к $GL(N|M)$ типу. Такие представления $H_n(q)$ двойственны представлениям линейных квантовых супергрупп $GL_q(N|M)$. В случае $q=1$ R_{KS} становится матрицей суперперестановки (при подходящем выборе x_{ij}). Порождаемые ей представления S_n двойственны представлениям супергрупп Λ_n $GL(N|M)$.

В настоящий момент не известно других типов гекковских R-матриц (по крайней мере, мне).

Предполагаю, что если такие типы (т.е. такие R, что ядро ρ_R порождено идемпотентом, отвечающим не прямоугольной диаграмме Юнга) будут найдены, то существовать они будут лишь при специальных значениях q.

В заключение обсудим, какие методы построения R-матриц известны.

(A) Наивный: искать решения уравнения YB в рамках некоторого анзаца. Уже встречавшийся нам анзац

$$R_{i_1 j_1 ; i_2 j_2} \neq 0 \text{ только если } i_1+i_2=j_1+j_2 \qquad (22)$$

Ему удовлетворяют все предъявленные выше R-матрицы, кроме R_R (16).

В малых размерностях $\dim V = 2, 3$, даже 4 этот анзац позволяет находить решения уравнений YB.

Дело в том, что при условиях (22) некоторые из компонент матричного кубического уравнения YB (7) факторизуются на линейные факторы. Кроме того, уравнения YB разбиваются на несколько блоков, индексируемых суммой строчных (или столбцовых) индексов (7)

$$i_1+i_2+i_3 = j_1+j_2+j_3 = K \in \{3, 4, \ldots, 3\dim V\}$$

YB затем решается последовательно в блоках с увеличивающимся $K = 3, 4, \ldots$.

Таким наивным образом действительно удаётся найти немало серий R-матриц, включая R_{DJ} (10); R_{KS} (15); R_{CG} и $R_{O(N)}$ — серии R-матриц происходящих из примеров (17), (18) при больших $\dim V$. Есть и другие серии R, которые можно так найти. Но это всё же угадайка.

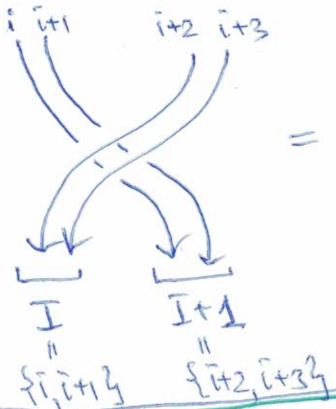
Б) Метод слияния R-матриц (Fusion)

Это метод построения более сложных R-матриц по известным простым.

Этот метод основан на 2-х наблюдениях:

а) Если объекты $b_i =$ 

удовлетворяет соотношению кос, то объекты

$B_I :=$ 

$= b_{i+1}\, b_i\, b_{i+2}\, b_{i+1}$ (23)

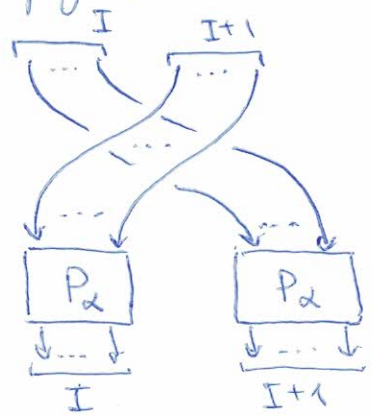
тоже удовлетворяют соотношениям кос:

$$B_I\, B_{I+1}\, B_I = B_{I+1}\, B_I\, B_{I+1}$$

Здесь нити в сложном заплетении B_I разбиваются на 2 подмножества I и $I+1$, внутри подмножеств они не переплетаются. В каждом из подмножеств может быть сколько угодно нитей: 1, 2 или более.

Алгебраически (23) – это гомоморфизм $B_n \to B_{2n}$ (в общем случае, когда I содержит k нитей – это гомоморфизм $B_n \to B_{kn}$)

б) Если теперь внутри подмножества нитей I мы умеем выделять 2-сторонние идеалы (т.е. перейдем от $B_{..}$ к $\mathbb{C}[B_{..}]$ и строим идемпотенты), как мы это умеем уже делать для алгебр Гекке, то из (23) можно навырезать косы с нитями "меньших размерностей". Например, для случая $H_n(q)$ и для индекса $I = \{1, 2, \dots, k\}$ годится конструкция

$G_I :=$ 

, где P_α – построенной нами в прошлой теме идемпотент, α – $\forall$ стандартная таблица, отвечающая $\forall$ диаграмме Юнга $\lambda \vdash k$. (24)

Если теперь известно представление $\rho_R : H_n(q) \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ с некоторой гекковской R-матрицей, то $\rho_R(G_I)$ будет R-матрицей, действующей в $\mathrm{End}(V_{\lambda \vdash k}^{\otimes 2})$

Таким образом, стартуя с простейшей R-матрицы Дринфельда-Джимбо (6) на 2-мерном V можно строить серию R-матриц, которые действуют на пространствах большей размерности и не являются гекковскими (имеют >2 разных собств. значений)

Этот метод был предложен в 80-х годах прошлого века в работах ленинградской школы мат. физики Л.Д. Фаддеева (П. Кулиш, Е. Склянин, Н. Решетихин, А. Кириллов). В наиболее явном виде такие "fused" R-матрицы предъявлены в работе В. Мангазеева (2014 г.)

Rem: Важно, что таким методом можно строить R-матрицы со спектральным параметром, получающиеся слиянием бакстеризованных элементов $\,_i(x)$ (см. записки лекций предыдущей темы). Дело в том, что общего метода построения R-матриц со спектральным параметром, если это не R-матрицы, реализующие представление алгебр Гекке, или Бирман-Мураками-Венцля, нет. Fusion позволяет их строить, а такие R-матрицы играют большую роль в физических приложениях.

(B) R-матрицы из представлений квазитреугольных алгебр Хопфа (квантовых групп).

Подробнее эту тему (вероятно) обсудит П. Сапонов. Здесь упомянем, что в алгебрах Хопфа, помимо умножения $m: A\otimes A \to A$ есть коумножение $\Delta: A \to A\otimes A$ — коассоциативный гомоморфизм алгебры A:

$$\forall a\in A \quad \Delta(a) = \sum_i a_{(1)i} \otimes a_{(2)i}$$

Вместе с коумножением Δ всегда есть коумножение Δ^{op} – оппозитное:

$$\boxed{\forall a \in A \quad \Delta^{op}(a) = \sum_i a_{(2)i} \otimes a_{(1)i}}$$

Если алгебра Хопфа кокоммутативна, то $\Delta^{op} = \Delta$. Это случай универсальных обертывающих алгебр U_g алгебр Ли g.

Если же $\Delta^{op} \neq \Delta$, но $\exists\, \mathcal{R} \in A \otimes A$:

$$\boxed{\forall a \in A \quad \Delta^{op}(a) = \mathcal{R}\, \Delta(a)\, \mathcal{R}^{-1}} \qquad (25)$$

то (при еще некоторых дополнительных условиях на $\mathcal{R}$) такая алгебра Хопфа называется квазитреугольной, а $\mathcal{R}$ называется универсальной R-матрицей.

Теперь, для $\forall$ представления $\rho_V : A \to \mathrm{End}(V)$ можно построить R-матрицу $\in \mathrm{Aut}(V \otimes V)$ вида

$$\boxed{R_{12} = P_{12}\, (\rho_V \otimes \rho_V)(\mathcal{R})} \qquad (26)$$

Здесь P_{12} – оператор перестановки, действующий на $V \otimes V$.

Эта конструкция изобретена В. Дринфельдом в 80-е годы прошлого столетия. Универсальную R-матрицу построить непросто. Вслед за Дринфельдом построением $\mathcal{R}$ для разных некокоммутативных деформаций универсальных обертывающих алгебр U_g (супер-) алгебр Ли g занимались С. Хорошкин и В. Толстой (90-е годы).