

ПРОГРАММА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КОЛЛОКВИУМА ПО ТФКП
(2 БАК, ВЕСНА 2023)

Билет коллоквиума будет состоять из двух теоретических вопросов и одной задачи.

В первом вопросе требуется дать определение или привести (без доказательства) формулу (указанные в билете). Во втором вопросе требуется сформулировать и доказать теорему, указанную в билете. Экзаменатор вправе задавать уточняющие вопросы.

За каждый из двух вопросов, а также за задачу можно получить от 0 до 4 баллов. Баллы суммируются.

Определения и формулы, которые надо знать

1. Голоморфная функция.
2. $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial \bar{z}$.
3. Интеграл от непрерывной комплекснозначной функции по пути на комплексной плоскости.
4. Устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка.
5. Ряд Лорана.
6. Формулы для коэффициентов степенного ряда голоморфной функции (через производные и интегралы).
7. Формулы для коэффициентов ряда Лорана.
8. Росток голоморфной функции в точке.
9. Аналитическое продолжение вдоль пути.
10. Вычет (определение через ряд Лорана и через интегралы).
11. Индекс замкнутого пути относительно точки.
12. Порядок нуля.
13. Порядок полюса.
14. Индекс ветвления голоморфной функции в точке.

Теоремы, которые надо уметь доказывать

Если доказательство теоремы длинное, можно начать с того, что рассказать его план. Экзаменатор вправе попросить вас подробно развернуть какие-то его пункты (возможно, все).

1. Условия Коши–Римана (с формулировками через якобиеву матрицу и через $\partial f/\partial \bar{z}$).
2. Теорема Коши для границы треугольника.
3. Существование первообразной для голоморфной функции на выпуклом открытом множестве.
4. Теорема Коши для границы области.
5. Теорема Коши для пары гомотопных путей.
6. Формула Коши для значения голоморфной функции в точке.
7. Формула Коши для производных голоморфной функции.
8. Эквивалентность голоморфности и аналитичности.
9. Производная голоморфной функции голоморфна.
10. Дифференцирование голоморфных функций коммутирует с равномерной сходимостью на компактах.
11. Предел равномерно сходящейся на компактах последовательности голоморфных функций — голоморфная функция.
12. Принцип аналитического продолжения, он же теорема единственности.
13. Существование и единственность разложения в ряд Лорана.
14. Характеризация устранимых особенностей в терминах ряда Лорана.
15. Характеризация полюсов в терминах ряда Лорана.
16. Характеризация существенных особенностей в терминах ряда Лорана и теорема Сохоцкого.
17. Теорема о сумме вычетов.

18. Принцип аргумента (формулировка через индекс).
19. Принцип аргумента (формулировка через интегральную формулу).
20. Теорема об открытом отображении, она же принцип сохранения области.
21. Принцип максимума модуля.